Частным случаем последнего уравнения является уравнение Кеммера—Дэффина для спина $s=0$, которое преобразуется по представлению $(0,0)\otimes(^1/_2, {}^1/_2)$.

Хотя рассмотренные два варианта довольно схожи, надо заметить, что решения в случае $(b)=(s-{}^1/_2, {}^1/_2)$ и в случае $(b)=(s+{}^1/_2, {}^1/_2)$ различны, поскольку члены с взаимодействием $F_{\mu\nu}$ в уравнениях (7) и (8) различаются.

Приведенные выше рассуждения действительны также в случае представлений $(a)=(0,s)$ и $(b)=(^1/_2, s\pm{}^1/_2)$ и дают такой же результат.

Автор выражает благодарность М. Кыйву за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Velo G., Zwanziger D., Phys. Rev., 186, 1337 (1969).
2. Velo G., Zwanziger D., Phys. Rev., 188, 2218 (1969).
3. Кыйв М., Лойде К., Мейтре И., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 289, 11 (1970).
4. Hurley W. J., Phys. Rev., D 4, 3605 (1971).
5. Loide R. K., Some remarks on relativistically invariant equations, Preprint FAI-10, Tartu, 1972.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 20/XII 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.3.12

УДК 533.6.013.42

Н. ВЕКСЛЕР

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА НЕДЕФОРМИРУЕМОЙ НЕПОДВИЖНОЙ СФЕРЕ

N. VEKSLER. HELILAINE DIFRAKTSIOON JÄIGAL LIIKUMATUL SFÄÄRIL

N. VEKSLER. DIFFRACTION OF SOUND WAVE ON RIGID IMMOVABLE SPHERE

В заметке излагается модификация разработанной в [1, 2] процедуры нахождения поля дифракционной волны.

1. На недеформируемую неподвижную сферу, погруженную в безграничную идеальную сжимаемую жидкость, набегает плоский импульс давления конечной длительности

$$p_1(t,\xi)=p_0[g(T_1)H(T_1)-g(T_2)H(T_2)],$$

$$T_1=t-\xi,\quad T_2=T_1-t_0. \tag{1}$$

Здесь p_1 — давление в падающей волне; p_0 — постоянная, имеющая размерность давления; g — функция, определяющая закон изменения давления в падающем импульсе; H — единичная функция Хевисайда; ξ — безразмерная (деленная на радиус сферы) координата; t — безразмерное время; t_0 — длительность падающего импульса. Единица безразмерного времени определяется как интервал, за которой звуковая волна в жидкости проходит расстояние, равное радиусу сферы. Время отсчитывается от момента соприкосновения падающего импульса с поверхностью сферы, происходящего в точке с координатами $r=1$, $\theta=0$.

Рассматривается задача о нахождении давления в дифракционной волне p_2, вызванного p_1 и удовлетворяющего волновому уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]p_2=0 \tag{2}$$

в области

$$t\geqslant 0, \qquad r\geqslant 1, \qquad \pi\geqslant\theta\geqslant 0 \tag{3}$$

при следующих условиях:

начальные условия

$$\text{при} \quad t=0 \quad p_2=\frac{\partial p_2}{\partial t}=0; \tag{4}$$

краевое условие

$$\text{при} \quad r=1 \quad w_1+w_2=0 \tag{5}$$

(w_1, w_2 — перемещения в жидкости, вызываемые давлениями p_1, p_2, соответственно);

условие затухания

$$\text{при} \quad r\to\infty \quad p_2\to 0; \tag{6}$$

условие ограниченности решения — давление p_2 ограничено в области, где оно определено.

Приведем лишь построение решения от падающего импульса, представляющего собой первый член в (1). Второй член в (1) порождает давление p_2, которое может быть найдено аналогичным путем. Полное решение находится путем суперпозиции.

2. Применим интегральное преобразование Лапласа [3] для решения поставленной задачи. Используя метод разделения переменных [4], теорему о разложимости [5] и разложение Сонина [6, 7]

$$\exp(sx)=\sum_{m=0}^{\infty}i_m(s)\,(2m+1)\,P_m(x), \qquad x=\cos\theta, \tag{7}$$

представим изображение решения (индекс L) уравнения (2), удовлетворяющее преобразованным условиям (4)—(6), в виде

$$p_2^L(r,\theta,s)=\frac{p_0}{r}\,sg^L(s)\exp[-s(r-1)]\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m^L(sr)\,(2m+1)\,P_m(x),$$

$$\varphi_m^L(sr)=\chi_m^L(sr)\,\psi_m^L(s), \quad \chi_m^L(sr)=\frac{f_m(sr)}{F_m(s)}, \quad \psi_m^L(s)=\exp(-s)\frac{\partial i_m(s)}{\partial s}. \tag{8}$$

В формулах (7), (8) используются обозначения: s — параметр преобразования Лапласа; P_m — полином Лежандра; i_m — сферическая функция Бесселя мнимого аргумента [8]; f_m, F_m — полиномы Стокса [1, 9].

3. Найдем оригинал $p_2(r,\theta,t)$ по изображению (8). Как известно [1, 10], $\chi_m^L(sr)$ — мероморфная функция. Применяя теорему Коши о вычетах, представим оригинал $\chi_m^L(sr)$ в следующем виде:

$$\chi_m(r,t)=\sum_{j=0}^{[1+{}^1/_2m]}\chi_{mj}(r,t);$$

$$\chi_{mj}(r,t)=\frac{s^m f_m(sr)}{\dfrac{\partial}{\partial s}[s^m F_m(s)]}\exp(st)\Big|_{s=s_{mj}}, \tag{9}$$

где s_{mj} суть корни полиномов Стокса $F_m(s)$, а $[1+{}^1/_2m]$ обозначает наибольшую целую часть числа $1+{}^1/_2m$. Используя результаты работы [11], имеем

при $j=0$

$$\chi_{m0}(t)=\delta_{m0}(r)\exp(-\alpha_{m0}t)\qquad (m=2n+1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{10}$$

при $j\neq 0$

$$\chi_{mj}(t)=\exp(-\alpha_{mj}t)[\gamma_{mj}(r)\sin\beta_{mj}t+\delta_{mj}(r)\cos\beta_{mj}t]. \tag{11}$$

В формулах (10), (11) принято следующее обозначение корней полиномов Стокса:

$$s_{mj}=-\alpha_{mj}\pm i\beta_{mj}. \tag{12}$$

Расчетные формулы вычисления амплитудных функций $\gamma_{mj}(r)$, $\delta_{mj}(r)$ приведены в [11]. Там же рассчитаны и табулированы значения корней s_{mj} и амплитудных функций $\gamma_{mj}(r)$, $\delta_{mj}(r)$ при $r=10^k$ $(k=0,1,2,3)$ для $m=0,1,2,\ldots,10$.

Используя формулы

$$\frac{\partial i_m(s)}{\partial s}=\frac{1}{2s^2}[\exp(s)V_m(s)+(-1)^m\exp(-s)F_m(s)],$$

$$F_m(s)=\sum_{k=0}^{m}f_{mk}(s+k+1)s^{-k},\qquad V_m(s)=\sum_{k=0}^{m}f_{mk}(-1)^k(s-k-1)s^{-k}, \tag{13}$$

$$f_{mk}=\frac{(m+k)!}{(m-k)!k!2^k},$$

найдем оригинал $\psi_m(t)$ в виде

$$\psi_m(t)=\sum_{k=0}^{m}\psi_{mk},\qquad \psi_{mk}=f_{mk}R_{mk}(t), \tag{14}$$

$$R_{mk}(t)=\frac{1}{2}\frac{1}{k!}[(-1)^k(1-t)t^kH(t)+(-1)^m(1+t_1)t_1^kH(t_1)],\qquad t_1=t-2.$$

Применяя теорему о свертывании и результаты (9)—(11), (14), вычислим оригинал функции $\varphi_m^L(sr)$ (8)

$$\varphi_m(r,t)=\sum_{j=0}^{[1+{}^1/_2m]}\sum_{k=0}^{m}\varphi_{mjk}(r,t);\qquad \varphi_{mjk}(r,t)=\int_0^t\chi_{mj}(y)\psi_{mk}(t-y)\,dy. \tag{15}$$

Вычисление интегралов функций $\varphi_{mjk}(r,t)$ тривиально. Используя преобразованные начальные условия (4) и теоремы о свертывании и сдвиге, найдем по изображению (8) оригинал

$$p_2(r,\theta,t)=\frac{p_0}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\zeta_m[t-(r-1)]H[t-(r-1)](2m+1)P_m(x), \quad (16)$$

$$\zeta_m(t)=\int_0^t\frac{\partial g(z)}{\partial z}\varphi_m(t-z)\,dz.$$

Основное преимущество предлагаемой процедуры по сравнению с изложенной в [2] состоит в том, что в ней удалось избежать разложения падающего импульса в ряд по полиномам Лежандра. Это обстоятельство позволяет провести основную часть работы, состоящую в вычислении функции $\varphi_m(t)$ (15), независимо от закона изменения давления в падающем импульсе. Сходимость ряда (16) может быть улучшена применением нелинейного преобразования частичных сумм ряда [12].

4. Плодотворность предлагаемого подхода продемонстрируем на примере изучения поля давления в области непосредственно за фронтом дифракционной волны. Для этой цели при обращении (8) используем асимптотику $s\to\infty$. В предположении $s\to\infty$ имеем

$$\chi_m^L(sr)\underset{s\to\infty}{\sim}\frac{1}{s}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (8), получим

$$p_2^L(r,\theta,s)\underset{s\to\infty}{\sim}\frac{p_0}{r}g^L(s)\exp[-s(r-1)]\sum_{m=0}^{\infty}\exp(-s)\frac{\partial i_m(s)}{\partial s}(2m+1)P_m(x). \quad (18)$$

Дифференцируя ряд (7) по s, найдем

$$x\exp(sx)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial i_m(s)}{\partial s}(2m+1)P_m(x). \quad (19)$$

Подстановка (19) в (18) дает

$$p_2^L(r,\theta,s)\underset{s\to\infty}{\sim}x\frac{p_0}{r}g^L(s)\exp\{-s[(r-1)+(1-x)]\}. \quad (20)$$

Из (20) сразу получим

$$p_2(r,\theta,\tau)\underset{\tau\to 0}{\sim}\frac{p_0}{r}xg(\tau)H(\tau);\qquad \tau=[t-(1-x)]-(r-1)\equiv t+x-r. \quad (21)$$

Данный результат содержит принцип Гюйгенса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харкевич А. А., Неустановившиеся волновые явления, М., 1950.
2. Векслер Н., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, 84 (1972).
3. Деч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М., 1960.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Основные уравнения математической физики, М, 1962.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, М., 1972
6. Кузнецов Д. С., Специальные функции, М., 1965.
7. Handbook of mathematical functions, Ed. Abramowitz M., Stegun I. A., N. Y., 1965.
8. Арфкен Г., Математические методы в физике, М., 1970.
9. Ржевкин С. Н., Курс лекций по теории звука, М., 1960.

10. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С., Динамические нагрузки при подводном взрыве, Л., 1967.
11. Эхо-сигналы от упругих объектов в воде, Ред. У. К. Нигул, Таллин, 1973 (в печати).
12. Shanks D., J. Math. and Phys., 34, 1 (1955).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9/II 1973

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 3

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН

ОБ УТОЧНЕНИИ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

M. LEVIN. PARIMATE KVADRATUURVALEMITE TÄPSUSTAMISEST

M. LEVIN. ÜBER EINE VERSCHÄRFUNG DER BESTEN QUADRATURFORMELN

Для практики численного интегрирования важна следующая задача: задана квадратурная формула, требуется построить другую квадратурную формулу с бо́льшим числом узлов, среди которых были бы все узлы заданной формулы. Для формул Гаусса эта задача решалась в [1], для наилучших (по определению [2]) на множествах функций формул — в [3]. Г. М. Вайникко поставил задачу рассмотреть вопрос продолжения процесса уточнения формул, начатого в [3]. Решению этой задачи и посвящена настоящая заметка.

По [2] квадратурная формула с остатком $R(f)$ называется наилучшей на множестве H функций $f(x)$ среди квадратурных формул заданного вида (определяемых конкретными значениями параметров), если для нее величина $\sup_{f\in H}|R(f)|$ имеет наименьшее значение.

Говоря об узлах x_k $(k=1, 2, \ldots, N)$ квадратурной формулы, будем иметь в виду, что они удовлетворяют условию $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant 1$.

Ниже мы используем следующие обозначения:

$M>0$, $1<q\leqslant\infty$, целые n, r — заданные числа; $p=q/(q-1)$;

$R_{2r,p}(x)$ — многочлен степени $2r$ со старшим коэффициентом, равным единице, наименее уклоняющийся от нуля в L_p на отрезке $[-1; 1]$;

$S_{2r,p}(x)$ — многочлен вида $x^r(x^r+a_1x^{r-1}+a_2x^{r-2}+\ldots+a_r)$, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0; 1]$ в метрике L_p;

$$\delta=\left[\frac{R_{2r,p}(1)}{S_{2r,p}(1)}\right]^{\frac{1}{2r}}, \quad h=\frac{1}{2(n-1+\delta)}, \quad \gamma=\delta/(2+\delta), \quad v=\gamma(2\gamma)^{2rp};$$