EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.3.11

УДК 539.126

Р.-К. ЛОЙДЕ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ВЫСШИХ СПИНОВ

R.-K. LOIDE. ELEKTROMAGNETILINE INTERAKTSIOON KÕRGEMATE SPINNIDE JAOKS

R.-K. LOIDE. ELECTROMAGNETIC INTERACTION FOR HIGHER SPINS

В недавно опубликованных работах Г. Вело и Д. Цванцигер [1, 2] сделали весьма пессимистический вывод о том, что для $s>1$ невозможно найти уравнение, которое допускало бы разумным образом ввести взаимодействие. В этих работах, где исследованы неквантованные уравнения, содержалась следующая идея: так как единственными уравнениями, описывающими распространение волн, являются гиперболические уравнения, то и уравнения для волновых полей должны быть гиперболическими. После введения взаимодействия можно исследовать, остается ли уравнение гиперболическим или нет. Но и в случае гиперболических уравнений могут еще возникнуть трудности, если скорость распространения взаимодействия окажется больше скорости света. Г. Вело и Д. Цванцигер, рассматривая некоторые конкретные уравнения, нашли, что в общем гиперболичность зависит от вида взаимодействия и в некоторых случаях даже от величины взаимодействия. Это, конечно, не всегда является недостатком первоначального уравнения, но может указывать на то, что данное взаимодействие не годится.

В случае минимального электромагнитного взаимодействия ($p_\mu \to D_\mu = p_\mu - eA_\mu$) можно все же для $s=3/2$ дать непротиворечивые уравнения. Уравнения типа $SO(1,4)$, соответствующие представлениям $(3/2, 3/2)$ и $(3/2, 1/2)$ [3], являются, например, гиперболическими. Член взаимодействия имеет вид $eA_\mu\beta^\mu$ и не меняет гиперболичности уравнения, поскольку оно не содержит производных.

В работе [4] даны уравнения для произвольного спина s, используя представления группы Лоренца $(s,0)\oplus(s-1/2, 1/2)$. Показано, что такие уравнения при минимальном электромагнитном взаимодействии — причинные, т. е. распространение взаимодействия не противоречит принципу причинности. Для спина s можно рассматривать еще и уравнения с представлениями $(s,0)\oplus(s+1/2, 1/2)$. Покажем, что эти уравнения тоже причинные. Используя формализм работы [5], можно анализировать эти два случая вместе.

Обозначая $(a)=(s,0)$, $(b)=(s\pm 1/2, 1/2)$, запишем уравнение в виде

$$p_\mu\beta^\mu\psi = m\psi, \tag{1}$$

где

$$\beta^0 = \begin{vmatrix} 0 & t^{(s)}_{ab} \\ t^{(s)}_{ba} & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta^k = \begin{vmatrix} 0 & t^{(s)}_{ab}S^{0k}_b - S^{0k}_a t^{(s)}_{ab} \\ t^{(s)}_{ba}S^{0k}_a - S^{0k}_b t^{(s)}_{ba} & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $k=1,2,3$; $S_a^{\mu\nu}$ и $S_b^{\mu\nu}$ — генераторы представлений (a) и (b); $t_{ab}^{(s)}$ — проекционные операторы спина s.

Заменяя p_μ на $D_\mu = p_\mu - eA_\mu$, где e — электрический заряд и A_μ — потенциал электромагнитного поля, получим уравнение

$$D_\mu \beta^\mu \psi = m\psi, \tag{3}$$

или подробнее

$$\begin{aligned} D_0 t_{ab}^{(s)}\psi_b + D_k\left(t_{ab}^{(s)} S_b^{0k} - S_a^{0k}\, t_{ab}^{(s)}\right)\psi_b &= m\psi_a, \\ D_0 t_{ba}^{(s)}\psi_a + D_k\left(t_{ba}^{(s)} S_a^{0k} - S_b^{0k}\, t_{ba}^{(s)}\right)\psi_a &= m\psi_b. \end{aligned} \tag{4}$$

Покажем, что подставляя из второго уравнения (4) ψ_b в первое уравнение, получим для ψ_a причинное уравнение. Из второго уравнения (4) видно, что в этом случае ψ_b тоже причинное, поэтому и решение уравнения — ψ. Уравнение для ψ_a имеет вид

$$\begin{aligned} (D_0^2 + [D_0, D_k]\,(S_a^{0k} - t_{ab}^{(s)} S_b^{0k}\, t_{ba}^{(s)}) + D_k D_l\,(t_{ab}^{(s)} S_b^{0k}\, t_{ba}^{(s)} S_a^{0l} + {} \\ + S_a^{0k}\, t_{ab}^{(s)} S_b^{0l}\, t_{ba}^{(s)} - t_{ab}^{(s)} S_b^{0k} S_b^{0l}\, t_{ba}^{(s)} - S_a^{0k} S_a^{0l}))\,\psi_a = m^2\psi_a. \end{aligned} \tag{5}$$

1) $(b) = (s - 1/2,\ 1/2)$.

Используя формулы работы [4], можно показать, что

$$t_{ab}^{(s)} S_b^{0k}\, t_{ba}^{(s)} = -\frac{s-1}{s} S_{(s)}^{k} \equiv \frac{s-1}{s} S_a^{0k},$$

$$t_{ab}^{(s)} S_b^{0k} S_b^{0l}\, t_{ba}^{(s)} = \frac{s-2}{s} S_{(s)}^{k} S_{(s)}^{l} - \frac{i}{s}\epsilon_m^{kl} S_{(s)}^{m} - g^{kl}.$$

Учитывая еще соотношение

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}, \tag{6}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, можно уравнение (5) записать в виде

$$\left(D_\mu D^\mu - \frac{ie}{2s} F_{\mu\nu} S_a^{\mu\nu}\right)\psi_a = m^2\psi_a. \tag{7}$$

Полученное уравнение второго порядка явно гиперболическое, поскольку члены с высшими производными имеют вид $\partial_t^2 - \Delta$. Отсюда видно, что решение уравнения — причинное.

2) $(b) = (s + 1/2,\ 1/2)$.

В этом случае получим

$$t_{ab}^{(s)} S_b^{0k}\, t_{ba}^{(s)} = -\frac{s+2}{s+1} S_{(s)}^{k} \equiv \frac{s+2}{s+1} S_a^{0k},$$

$$t_{ab}^{(s)} S_b^{0k} S_b^{0l}\, t_{ba}^{(s)} = \frac{s+3}{s+1} S_{(s)}^{k} S_{(s)}^{l} + \frac{i}{s+1}\epsilon_m^{kl} S_{(s)}^{m} - g^{kl}.$$

Учитывая еще (6), запишем уравнение (5) в виде

$$\left(D_\mu D^\mu + \frac{ie}{2(s+1)} F_{\mu\nu} S_a^{\mu\nu}\right)\psi_a = m^2\psi_a. \tag{8}$$

Легко убедиться, что и это уравнение является гиперболическим. Решение его — причинное.

Частным случаем последнего уравнения является уравнение Кеммера—Дэффина для спина $s=0$, которое преобразуется по представлению $(0,0)\otimes(^1/_2, {}^1/_2)$.

Хотя рассмотренные два варианта довольно схожи, надо заметить, что решения в случае $(b)=(s-{}^1/_2, {}^1/_2)$ и в случае $(b)=(s+{}^1/_2, {}^1/_2)$ различны, поскольку члены с взаимодействием $F_{\mu\nu}$ в уравнениях (7) и (8) различаются.

Приведенные выше рассуждения действительны также в случае представлений $(a)=(0,s)$ и $(b)=(^1/_2, s\pm{}^1/_2)$ и дают такой же результат.

Автор выражает благодарность М. Кыйву за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Velo G., Zwanziger D., Phys. Rev., **186**, 1337 (1969).
2. Velo G., Zwanziger D., Phys. Rev., **188**, 2218 (1969).
3. Кыйв М., Лойде К., Мейтре И., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 289, 11 (1970).
4. Hurley W. J., Phys. Rev., D **4**, 3605 (1971).
5. Loide R. K., Some remarks on relativistically invariant equations, Preprint FAI-10, Tartu, 1972.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
20/XII 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 3

УДК 533.6.013.42

Н. ВЕКСЛЕР

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА НЕДЕФОРМИРУЕМОЙ НЕПОДВИЖНОЙ СФЕРЕ

N. VEKSLER. HELILAINE DIFRAKTSIOON JÄIGAL LIIKUMATUL SFÄÄRIL

N. VEKSLER. DIFFRACTION OF SOUND WAVE ON RIGID IMMOVABLE SPHERE

В заметке излагается модификация разработанной в [1, 2] процедуры нахождения поля дифракционной волны.

1. На недеформируемую неподвижную сферу, погруженную в безграничную идеальную сжимаемую жидкость, набегает плоский импульс давления конечной длительности

$$p_1(t,\xi)=p_0[g(T_1)H(T_1)-g(T_2)H(T_2)],$$

$$T_1=t-\xi,\quad T_2=T_1-t_0. \tag{1}$$

Здесь p_1 — давление в падающей волне; p_0 — постоянная, имеющая размерность давления; g — функция, определяющая закон изменения