

И. МИКК

К РАСЧЕТУ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ОБЪЕМНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Как известно, эффективное излучение определяется собственным излучением рассматриваемого элемента излучающей системы и яркостью падающего излучения, которая определяется, в свою очередь, эффективным излучением других элементов системы. Так как входящие в интегральные уравнения теплообмена излучением искомые эффективные лучистые потоки сильно зависят от температурного поля, то решение задачи значительно затрудняется. Проблему можно было бы значительно упростить, если бы удалось разделить задачу на две части с отдельным рассмотрением оптико-геометрических факторов, определяющих решение, и влияния температурного поля на это решение.

Рассмотрим общеизвестное уравнение (см., напр., [1]) переноса лучистой энергии в поглощающей среде. Яркость луча в точке P (рис. 1) определяется следующим образом:

$$B = \dot{B}_1 \exp\left(-\int_0^l k d\xi\right) + \int_0^l \frac{\eta^{\text{эф}}}{4\pi} \exp\left(-\int_0^{\xi} k d\xi^*\right) d\xi, \quad (1)$$

где B_1 — эффективная яркость луча на границе системы.

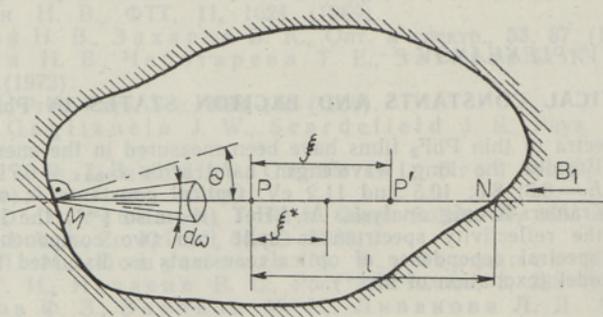


Рис. 1. Схема излучающей системы.

Входящие сюда величины (B_1 , k , α , β и $\eta^{\text{эф}}$) зависят от температурного поля. Предположим, что температурное поле задано в виде функции $T(x, y, z)$. В этом случае яркость B также выражается как функция от пространственных координат рассматриваемой точки. Поэтому функцию $B(x, y, z)$ можно разложить в ряд Тейлора на прямой ξ (рис. 1)

$$B(\xi) = B(P) + B'(P)\xi + \frac{1}{2!} B''(P)\xi^2 + \frac{1}{3!} B'''(P)\xi^3 + \dots \quad (2)$$

Уравнением (2) выражается основное содержание проблемы. Если известны яркость B и ее производные в точке P , то яркость $B(P')$ в любой другой точке определяется через $B(P)$ и геометрическую характеристику ξ , которая отделена в (2) от производных B . Непосредственное применение уравнения (2), однако, затруднительно ввиду сложности функции (1). Отметим, что температурная зависимость плотности объемного излучения (η) очень сильная, в то же время коэффициент ослабления луча k зависит от температуры сравнительно слабо. Поэтому один путь упрощения задачи может заключаться в переходе к безразмерным координатам $X = kx$, $Y = ky$, $Z = kz$, $s = k\xi$ и т. д. В этом случае $\eta^{\text{эф}}/4k = \Phi(X, Y, Z)$ и уравнение (1) представляется в виде

$$B = B_1 \exp\left(-\int_0^L ds\right) + \int_0^L \frac{\Phi}{\pi} \exp\left(-\int_0^s ds^*\right) ds. \quad (3)$$

Надо иметь в виду, что переходом к безразмерным координатам $X = xk(x, y, z)$, $Y = yk(x, y, z)$ и т. д. нарушается геометрическое подобие. Например, прямые в пространстве (X, Y, Z) становятся кривыми (путь луча!). Поэтому каждый раз требуется специальный анализ допустимости такого перехода. В рамках данной статьи мы ограничимся случаем постоянного усредненного по всему рассматриваемому пространству значения коэффициента ослабления луча k .

Функция Φ может быть разложена по ходу луча s в ряд Тейлора около точки P

$$\Phi = \Phi_P + \Phi'_P s + \frac{1}{2!} \Phi''_P s^2 + \frac{1}{3!} \Phi'''_P s^3 + \dots \quad (4)$$

Подстановка (4) в (3) дает после интегрирования

$$B = B_1 e^{-L} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_P^{(n)} \left(1 - e^{-L} \sum_{m=0}^n \frac{L^m}{m!}\right). \quad (5)$$

Уравнение (5) может быть применено вместо уравнения (3) при выводе разных методов расчета теплообмена излучением. Такой подход оказывается особенно полезным при заданном поле температур (фундаментальная постановка).

Уравнения (3) и (5) применимы не только для монохроматического, но и для интегрального излучения. В обоих случаях величина $\eta^{\text{эф}}$ может быть представлена как сумма плотностей собственного объемного $\eta^{\text{соб}}(\Phi^{\text{соб}})$ и рассеянного излучения $\eta^{\text{расс}} = \beta \cdot \eta^{\text{пад}}$, где $\eta^{\text{пад}}$ — объемная плотность падающего излучения. В случае монохроматического излучения плотность $\eta_{\lambda}^{\text{соб}}$ и соответствующая функция $\Phi_{\lambda}^{\text{соб}}$ определяются по формуле

$$\Phi_{\lambda}^{\text{соб}} = \frac{\alpha_{\lambda}}{k_{\lambda}} I_{\lambda}. \quad (6)$$

Для интегрального излучения следует применять уже усредненные по спектру коэффициенты α и k , а вместо закона Планка пользоваться законом Стефана—Больцмана

$$\Phi_{\nu}^{\text{соб}} = \frac{\alpha}{k} E_{\nu} \quad (E_{\nu} = \sigma T^4). \quad (7)$$

2. Рассмотрим интегральное излучение в замкнутой системе, состоящей из неизоотермической и нерассеивающей среды ($k = \alpha$; $\beta = 0$) и ограничивающих ее стенок. Если действует закон косинусов, то плотность полусферического падающего излучения в точке M (рис. 1) определяется формулой

$$E^{\text{пад}}(M) = \int_{2\pi} B(M) \cos \theta d\omega. \quad (8)$$

Плотность полусферического эффективного излучения стенки в точке M определяется соответственно как

$$E^{\text{эф}}(M) = E^{\text{собр}}(M) + r(M) \int_{2\pi} B(M) \cos \theta d\omega. \quad (9)$$

Так как для диффузионно излучающей и отражающей стенки $B = E/\pi$, то из уравнений (5), (7) и (9) получим

$$E_{\text{ст}}^{\text{эф}}(M) = E_{\text{ст}}^{\text{собр}}(M) + r(M) \int_{2\pi} E_{\text{ст}}^{\text{эф}}(N) e^{-L} d\varphi_{MN} + \\ + r(M) \int_{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} E_V^{(n)}(M) \left(1 - e^{-L} \sum_{m=0}^n \frac{L^m}{m!} \right) d\varphi_{MN}, \quad (10)$$

где $d\varphi_{MN} = \cos \theta d\omega/\pi$ — дифференциал углового коэффициента между точками (зонами) M и N .

Интегральное уравнение (10) имеет очень упрощенный вид, так как при заданном распределении температуры среды в качестве неизвестного в него входит только эффективная плотность полусферического излучения оболочки. Если оболочку объема разделить на зоны с постоянными теплофизическими характеристиками (T, r), то нетрудно получить известные уравнения для зонального расчета. При этом первый член в последнем интеграле

$$\int_{\omega} E_V(M) (1 - e^{-L}) d\varphi_{MN} = E_V(M) \varepsilon_{\omega}(M) \varphi_{MN} \quad (11)$$

характеризует собственное излучение слоя среды, который виден из точки M в телесном угле ω и имеет температуру среды в точке M . Здесь $\varepsilon_{\omega}(M)$ — степень черноты этого слоя среды. Последний интеграл в (10) может быть представлен как собственное излучение среды при температуре в точке M , умноженное на поправку, учитывающую температурное поле в объеме среды. При этом дифференцирование в произвольной координатной системе (X_1, X_2, X_3) производится по правилу

$$\frac{dE}{ds} = \frac{\partial E}{\partial X_1} \frac{dX_1}{ds} + \frac{\partial E}{\partial X_2} \frac{dX_2}{ds} + \frac{\partial E}{\partial X_3} \frac{dX_3}{ds}. \quad (12)$$

Поэтому для последнего интеграла в (10) получаем выражение

$$\int_{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} E_V^{(n)}(M) \left(1 - e^{-L} \sum_{m=0}^n \frac{L^m}{m!} \right) d\varphi_{MN} = \\ = E_V(M) \varepsilon_{\omega}(M) \varphi_{MN} \left(1 + \sum \mu_n \frac{E_V^{[n]}(M)}{E_V(M)} \right), \quad (13)$$

где

$$\mu_n = \frac{1}{\varepsilon_{\omega}(M) \varphi_{MN}} \int_{\omega} \sum_j \left(1 - e^{-L} \sum_{m=0}^n \frac{L^m}{m!} \right) j_j d\varphi_{MN}, \quad (14a)$$

величина $E_V^{[n]}$ — производная n -го порядка от E_V по координатам

X_1, X_2, X_3 , а f_j — комбинация производных от X_i по s , которая возникает в результате многократного дифференцирования E_V по s согласно правилу (12). Коэффициенты μ_n могут быть названы коэффициентами неізотермичности, так как они в (13) учитывают неізотермичность среды. Нередко можно с достаточной точностью считать, что $\varepsilon_\omega(M) = \varepsilon_{2\pi}(M) = \varepsilon_V(M)$. В этом случае коэффициенты неізотермичности среды определяются интегрированием по полусферическому телесному углу

$$\mu_n = \frac{1}{\varepsilon_V(M)} \int_{2\pi} \sum_j \left(1 - e^{-L} \sum_{m=0}^n \frac{L^m}{m!} \right) f_j d\varphi_{MN}. \quad (14)$$

Таким образом, интегральное уравнение (10) представляется в виде

$$E_{\text{ст}}^{\text{эф}}(M) = E_{\text{ст}}^{\text{соб}}(M) + r(M) \int_{2\pi} E_{\text{ст}}^{\text{эф}}(N) e^{-L} d\varphi_{MN} + r(M) \varepsilon_V(M) E_V(M) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{E_V^{[n]}(M)}{E_V(M)} \right). \quad (15)$$

Уравнение (15) отличается тем, что в последнем члене разделены величины, характеризующие температурное поле в объеме, — $E_V^{[n]}/E_V$, и величины, определяющие оптико-геометрические свойства системы, — $r(M)$, $\varepsilon_V(M)$, μ_n . Поэтому при заданных параметрах заполняющей объем среды остается только уравнение, описывающее эффективное излучение окружающих стенок. Соответствующий переход к зональному расчету приводит к алгебраическим уравнениям с одной объемной зоной. Например, для двузональной системы «объем — оболочка» из (15) получается после несложных действий известная формула плотности результирующего потока

$$q^{\text{рез}} = \frac{\frac{\varepsilon_V}{a_V} E_V^* - \frac{\varepsilon_{\text{ст}}}{a_{\text{ст}}} E_{\text{ст}}}{\frac{1}{a_V} + \frac{1}{a_{\text{ст}}} - 1}, \quad (16)$$

где эффективная величина собственного излучения объема E_V^* выражается как произведение

$$E_V^* = E_V(M) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{E_V^{[n]}(M)}{E_V(M)} \right). \quad (17)$$

Отметим, что вместо эффективного значения E_V^* можно использовать также аналогичное выражение для эффективной степени черноты излучающего объема

$$\varepsilon_V^* = \varepsilon_V(M) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{E_V^{[n]}(M)}{E_V(M)} \right) \quad (18)$$

или эффективную температуру среды

$$T_V^* = T_V(M) \sqrt[4]{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{E_V^{[n]}(M)}{E_V(M)}}. \quad (19)$$

Так как производные $E_V^{[n]}$ зависят от распределения температуры в объеме, то вопрос о сходимости ряда в формулах (17) — (19) требует в каждом конкретном случае специального анализа.

3. Предлагаемая методика может оказаться полезной при решении разных задач теплообмена излучением, где в объеме задается поле температур. Например, поле температур может быть определено предварительно экспериментальным путем или вычислено по условиям другого определяющего процесса (горения, смешивания и т. д.). Принцип решения может быть распространен также на обратные задачи с привлечением методов итерации, интерполяции и т. д. Один из возможных примеров решения прямой задачи рассмотрен в [2].

Ниже в качестве примера рассмотрим излучение шарового неизотермического объема. Предположим, что температурное поле радиальное и задается как функция от квадрата относительной координаты $p = (q/R)^2$. Согласно рис. 2

$$q^2 = R^2 + s^2 - 2Rs \cos \theta. \quad (20)$$

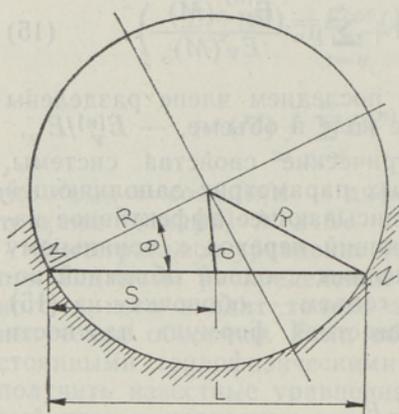


Рис. 2. Схема сферического объема.

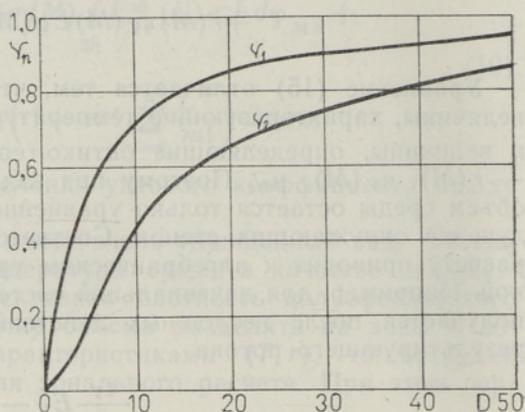


Рис. 3. Коэффициенты неизотермичности η_1 и η_2 сферического объема в зависимости от безразмерного диаметра объема.

Поэтому производные E_V в направлении s будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} E_V^{(1)} &= \frac{dE_V}{dp} \frac{dp}{ds} = E_V^{[1]} \cdot \frac{1}{R^2} (2s - 2R \cos \theta), \\ E_V^{(2)} &= \frac{d^2 E_V}{dp^2} \left(\frac{dp}{ds} \right)^2 + \frac{dE_V}{dp} \frac{d^2 p}{ds^2} = \\ &= E_V^{[2]} \cdot \frac{1}{R^4} (2s - 2R \cos \theta)^2 + E_V^{[1]} \cdot \frac{2}{R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Около точки M на стенке сферической оболочки при $p = 1$, $s = 0$ они получают вид

$$\left. \begin{aligned} E_V^{(1)} &= -E_V^{[1]} \cdot \frac{4}{D^2} D \cos \theta, \\ E_V^{(2)} &= E_V^{[1]} \cdot \frac{8}{D^2} + E_V^{[2]} \frac{16}{D^4} D^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Сопоставление формул (11) — (14) и (22) произведем с учетом того, что $d^3 p / ds^3 = 0$; $L = D \cos \theta$; $d\varphi = 2L dL / D^2$; после интегрирования получаем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_V &= 1 - \frac{2}{D^2} [1 - (1+D)e^{-D}], \\ \mu_1 \varepsilon_V &= \frac{8}{D^4} \left\{ (D^2 - \frac{1}{3}D^3) - [4 - (4+4D+D^2)e^{-D}] \right\}, \\ \mu_2 \varepsilon_V &= \frac{32}{D^6} \left\{ \left(6D^2 - 2D^3 + \frac{1}{4}D^4 \right) - [30 - (30+30D+9D^2+D^3)e^{-D}] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Перейдем теперь к новым нормированным коэффициентам неізотермичности v_n , которые стремятся к единице при $D \rightarrow \infty$, т. е.

$$v_n = \mu_n(D) / \mu_n(\infty). \quad (24)$$

Предельные значения $\mu_n(\infty)$ могут быть найдены из формул (23)

$$\mu_1(\infty) = -\frac{4}{3} \left(\frac{2}{D} \right); \quad \mu_2(\infty) = +2 \left(\frac{2}{D} \right)^2; \quad \mu_3(\infty) = -\frac{16}{5} \left(\frac{2}{D} \right)^3 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, для сферического неізотермического объема получаются формулы с коэффициентами v_n . Например, формула (17) имеет вид

$$\begin{aligned} E_V^*/E_V &= 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{2}{D} \right) v_1 \frac{E_V^{[1]}}{E_V} + 2 \left(\frac{2}{D} \right)^2 v_2 \frac{E_V^{[2]}}{E_V} - \\ &\quad - \frac{16}{5} \left(\frac{2}{D} \right)^3 v_3 \frac{E_V^{[3]}}{E_V} + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Два первых значения коэффициентов v_1 и v_2 приведены на рис. 3.

Рассмотрим случай, когда температурное поле задается уравнением

$$T = T_0 \sqrt{1 - \kappa r}. \quad (26)$$

Смысл коэффициента κ становится ясным, если выразить температуру заполняющей объем среды около стенки $T_c = T_0 \sqrt{1 - \kappa}$, тогда $\kappa = 1 - (T_c/T_0)^2$. Из (26) получается, что в точке около стенки ($r = 1$)

$$\left. \begin{aligned} E_V &= E_{V_0} (1 - \kappa)^2, \\ E_V^{[1]} &= -2E_{V_0} \kappa (1 - \kappa), \\ E_V^{[2]} &= 2E_{V_0} \kappa^2, \\ E_V^{[3]} &= E_V^{[4]} = \dots = 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где $E_{V_0} = \sigma T_0^4$. Формула же (25) в таком случае преобразуется к виду

$$E_V^*/E_{V_0} = (1 - \kappa)^2 + \frac{8}{3} \left(\frac{2}{D} \right) v_1 \kappa (1 - \kappa) + 4 \left(\frac{2}{D} \right)^2 v_2 \kappa^2. \quad (28)$$

Рассмотрим в заключение на базе формулы (28) влияние некоторых факторов на теплообмен излучением в топках камерного сжигания топлива. Температурный уровень в таких топках характеризуется обычно через энтальпию топочных газов. В данном случае

$$I = \bar{c}_p \bar{T} V = \int_V c_p T dV. \quad (29)$$

Отсюда для сферического объема, принимая $c_p = \bar{c}_p$ и используя (26), нетрудно получить

$$\bar{T}/T_0 = \frac{3}{8} \left[\frac{\arcsin \sqrt{\kappa}}{\kappa \sqrt{\kappa}} + \frac{(2\kappa - 1)\sqrt{1 - \kappa}}{\kappa} \right]. \quad (30)$$

Сопоставление формул (28) и (30) дает

$$\frac{T^*}{\bar{T}} = \frac{\frac{8}{3} \kappa \sqrt[4]{(1 - \kappa)^2 + \frac{8}{3} \left(\frac{2}{D}\right) v_1 \kappa (1 - \kappa) + 4 \left(\frac{2}{D}\right)^2 v_2 \kappa^2}}{\frac{\arcsin \sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa}} + (2\kappa - 1) \sqrt{1 - \kappa}}. \quad (31)$$

Полученный результат показывает, что теплообмен излучением в топочной камере может быть определен при помощи эффективной температуры среды (газов) T^* . Последняя определяется, однако, однозначно через среднюю термодинамическую температуру \bar{T} только для изотермической топки ($T^* = T_0 = \bar{T}$). Для неизотермической топки отношение T^*/\bar{T} зависит от температурного поля (в данной статье поле принято произвольным, см. формулу (26)) и от оптической толщины топки (v_1, v_2, D и т. д.). В рассматриваемом примере в предельном случае, когда температура газов около стенки приближается к $T_c = 0$ и $\kappa = 1$, получается

$$T^*/\bar{T} = \frac{32 \sqrt[4]{v_2}}{3\pi \sqrt{D}}. \quad (32)$$

Зависимость (32) представлена графически на рис. 4. Как видно, для топочного объема, имеющего малую оптическую толщину, отношение

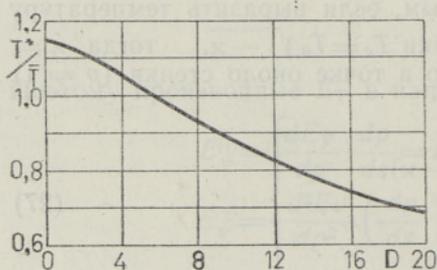


Рис. 4. Отношение эффективной и средней температур в зависимости от оптической толщины объема.

T^*/\bar{T} стремится к значению 1,17. Поэтому в маленьких топках эффективная температура даже выше средней термодинамической температуры. Однако чем больше топка по оптической толщине, тем меньшим становится отношение T^*/\bar{T} . Интересно отметить также, что определяющие теплообмен излучением эффективные температуры будут различны для чистой и загрязненной топки, так как по мере загрязнения изменяется степень неизотермичности топочного объема.

Обозначения

a — коэффициент поглощения;

B — яркость луча;

c_p — удельная теплоемкость;

D — безразмерный диаметр сферического объема;

E — плотность полусферического интегрального излучения;

I — энтальпия;

r — коэффициент отражения стенки;

$s = k\xi$ — безразмерная координата в направлении луча;

T — температура ($^{\circ}\text{K}$);

V — объем;

X, Y, Z — безразмерные координаты;

x, y, z — координаты;

I_λ — функция Планка монохроматического излучения;	ϵ — степень черноты;
$k = \alpha + \beta$ — коэффициент ослабления луча;	η — плотность сферического объемного излучения;
α, β — коэффициенты поглощения и рассеяния соответственно;	θ — угол;
L — безразмерная длина луча;	μ_n — коэффициент неизоотермичности;
l — длина луча;	ν_n — нормированный коэффициент неизоотермичности;
M, N, P — точки;	ξ — координата в направлении луча;
$p = (q/R)^2$ — геометрический параметр;	σ — постоянная закона Стефана—Больцмана;
R — безразмерный радиус сферы;	φ — угловой коэффициент;
q — удельный (результурующий) тепловой поток;	ω — телесный угол (рис. 1).

Индексы

эф — эффективный;	0 — центр объема;
соб — собственный;	с — объем около стенки;
расс — рассеянный;	ст — стенка;
пад — падающий;	λ — длина волны монохроматического излучения.
рез — результирующий;	
V — объем;	

ЛИТЕРАТУРА

1. Невский А. С., Лучистый теплообмен в печах и топках, М., 1971.
2. Микк И., Померанцев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 100 (1970).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
7/II 1973

I. MIKK

MITTEISOTERMILISE MAHULISE KIIRGUSE ARVUTAMISEST

Vaadeldakse võrrandit kiirguse leviku kohta keskkonnas. Selles võrrandis esineva temperatuurivälja funktsiooni arendamine Taylori ritta võimaldab saada võrrandid, milles geometrilis-optilised suurused on eraldatud temperatuuri funktsioonidest. Arvutuseks soovitatakse integraalvõrrandit (15), millesse on viidud mitteisotermilisuse tegurid. Näitena vaadeldakse kiirgust mitteisotermilises sfäärilises ruumis. Mitteisotermilisuse tegurite väärtused v_1 ja v_2 on esitatud joonisel 2. Meelevaldselt valitud temperatuurivälja uurides (26) leiti, et efektiivne kiirguse temperatuur sõltub süsteemi optilisest paksusest (joon. 4) ega ole määratav ainult keskkonna keskmise temperatuuri järgi.

I. MIKK

ON THE CALCULATION OF NONISOTHERMAL VOLUMINOUS RADIATION

In this article the problem of nonisothermal voluminous radiation is discussed. It is shown that the equation of the radiation energy transfer in the volume (1) may be given in a form where the geometrical-optical and temperature factors are separated. This is realized when the temperature field function is presented in the form of a Taylor series (2). An integral equation (10) is derived from the calculation of the radiant flux on the walls. A further simplification of (10) is obtained by means of the factors of nonisothermality, for the practical calculation of which the integral equation (15) is suggested. As an example, the radiation of a nonisothermal spherical volume is discussed. The formulae (23) of the factors of nonisothermality v_1 and v_2 are derived, and the values of these factors are plotted on Fig. 3. The temperature field of spherical volume is given arbitrarily by function (26). Accordingly, a dependence of optical thickness of the system on the effective radiation temperature is obtained (Fig. 4). In view of the above, the effective radiation temperature cannot be determined from mean temperature, only.