EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.3.04

УДК 531.38

И. КЕЙС

ОБ УПРАВЛЕНИЯХ, РАВНОСИЛЬНЫХ НЕКОТОРОМУ КЛАССУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИСТЕМЫ

В данной статье, являющейся продолжением работы [1], рассматривается вопрос существования однопараметрического класса регуляторов, для которого управляемые системы являются некоторыми отображениями класса C^1 порождающей системы. Получены уравнения, определяющие класс регуляторов в неособом и вырожденном случаях отображения. Дан вид преобразования между инвариантами порождающей системы и инвариантами управляемой системы на этом классе регуляторов. В приложениях приведено конструктивное определение рассматриваемого класса отображений, получены классы систем, имеющих n-2 автономных инварианта, и приведена лемма об автоморфизме автономной системы.

1. Постановка и метод. Рассмотрим управляемую систему, заданную уравнениями

$$dx'_j/dt' = X_j(x'_1, \ldots, x'_n, t' \mid u) \qquad (j=\overline{1, n-1}), \tag{1}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)' \in U$ — некоторая область, $0 \in U$; $u(x', t') \in W$ — класс, обладающий необходимыми свойствами гладкости в области $D \ni (x', t')$. Система $dx_j/dt = X_j(x, t/0)$ является порождающей по отношению к (1). X, U, W выбраны так, чтобы в D существовали единственные решения управляемой и порождающей систем

$$dx'_j/X_j(x' \mid u) = dx'_n, \tag{2}$$

$$dx_j/X_j(x \mid 0) = dx_n \qquad (x_n = t,\ x'_n = t'). \tag{3}$$

Определим композиционную группу преобразований (к. п.) в D равенством $x'' = \Theta(z, x')$, $\Theta \in C^1$ по z, x', где $\Theta(z, x')$ — решение уравнений $dx''/dz = \lambda(z, x'')\xi(x'')$ (λ — скалярная функция, $\Theta(0, x') \equiv x'$) находится суперпозицией функций φ, P

$$x'' = \varphi[P(z, x''), x']. \tag{4}$$

Здесь $\varphi \in C^1$ — решение системы

$$dx' = \xi(x')\,dp, \tag{γ}$$

которое имеет по p [2, 3] групповые причинно-аддитивные свойства. Функция $P(z, x)$ удовлетворяет в D уравнениям

$$P(0, x) \equiv 0; \quad \partial P/\partial z + \lambda(z, x)\xi_i(x)\,\partial P/\partial x_i \equiv \lambda(z, x). \tag{5}$$

Она существует и единственна [1, 4] при $\lambda \in C^1$, $\lambda \not\equiv 0$ на множестве $\xi \neq 0$. Тогда [5] решение $\Theta(z, x')$ определено на $|z| < \infty$.

Пусть в D существует [6, 1] общий интеграл системы (γ), определенный функциями $Y'_i = \omega_i(x') \in C^1$ $(i=\overline{1,n}) : \omega_j(x')$, $\omega_n(x') - p$. В переменных y'_i группа φ определяет сдвиг

$$y'_j = y_j; \quad y'_n = y_n + p. \tag{6}$$

В силу свойств φ, λ и (5) существует однозначная функция $x'' = \Theta(z, x') \in C^1$. Однако можно показать, что обратная функция $x' = \Theta^{-1}(z, x'')$ не существует тогда и только тогда, когда P принадлежит вырожденному классу $\{P^*\}$

$$P^*(z, x) = -\omega_n(x) + V[\omega_j(x), z], \tag{7}$$

где V — произвольная гладкая функция указанных аргументов. Гладкое обратное отображение $\Theta^{-1}(z, x'')$ существует тогда и только тогда, когда $P \bar{\in} \{P^*\}$. Сопоставив системы (4) и (5), сформулируем следующую задачу: установить класс регуляторов $\hat{u}$, названных допустимыми, на котором можно считать, что система (3) получена из системы (2) с помощью к. п. $x = \Theta^{-1}(z, x')$.

Невырожденное к. п. Θ в переменных y_i имеет вид

$$y'_j = y_j; \quad y'_n = y_n + K(z, y') \quad (K(z, y) = P[z, x(y)]). \tag{8}$$

Системы (3) и (2) в переменных y_i, y'_i приобретают вид

$$dy_1/Y_1(y_1, \ldots, y_n \mid 0) = \ldots = dy_n/Y_n(y_1, \ldots, y_n \mid 0), \tag{9}$$

$$dy'_1/Y_1(y'_1, \ldots, y'_n \mid u) = \ldots = dy'_n/Y_n(y'_1, \ldots, y'_n \mid u), \tag{10}$$

где

$$Y_i(y' \mid u) = X_s(x' \mid u)\frac{\partial \omega_i}{\partial x'_s} \quad (s=\overline{1,n}); \quad Y'_i = Y_i(\bar{y}'_j, \bar{y}'_n - K(z, \bar{y}) \mid 0). \tag{11}$$

Полученная из (9) с помощью к. п. (8) система

$$d\bar{y}'_j/Y'_j = \left(1 - \frac{\partial K}{\partial \bar{y}'_n}\right) d\bar{y}'_n \Big/ \left(Y'_n + Y'_j \frac{\partial K}{\partial \bar{y}'_j}\right) \tag{12}$$

по условию задачи эквивалентна системе (10) на регуляторах, удовлетворяющих уравнениям

$$Y_j(y \mid u) = v_1(y, z)\, Y'_j(y \mid 0),$$

$$(1 - \partial K/\partial y_n)\, Y_n(y, u) = v_1(y, z)\, [Y'_n(y \mid 0) + Y'_j(y \mid 0)\, \partial K/\partial y_j], \tag{13}$$

где v_1 — произвольная гладкая функция от y, z. Отметим, что система (13) существенно упрощается, если $Y(y|u)$ удовлетворяет по u лемме Адамара [5] или если преобразование Θ — автоморфизм системы (3).

Пусть найден допустимый класс регуляторов $\{\hat{u}(y, z)\}$, решающий уравнение (13). Если инвариант Ω системы, содержащей y_n, не зависит от y_n, то он называется [3] автономным. В предположениях приложения II о функциях Y общий интеграл системы (9) дается серией $n-1$ функций, где первые $n-3$ функции — автономные инварианты. Тогда общий интеграл системы (9) равен

$$\Omega_k[y_1, \ldots, y_{n-1}]; \quad \Omega_{n-2}[y_1, \ldots, y_n]; \quad \Omega_{n-1}[y_1, \ldots, y_n] \quad (k=\overline{1, n-3}), \tag{14}$$

а система (10) для $u = \hat{u}(y, z)$ обладает общим инвариантом

$$\Omega_k[y'_1, \ldots, y'_{n-1}]; \quad \Omega_{n-2}[y'_j \mid y'_n - K(z, y')]; \quad \Omega_{n-1}[y'_j, y'_n - K(z, y')]. \tag{15}$$

Из (14), (15) следует, что траектории систем (9), (10) лежат в пересечении $n-3$ одинаковых поверхностей $\Omega_k = h_k$, а общие решения систем (9), (10) определяются при $Y_n \not\equiv 0$ в D равенствами

$$y_j = f_j[y_n, h_1, \ldots, h_{n-1}]; \quad y'_j = f_j[y'_n - K(z, y') \mid h'_1, \ldots, h'_{n-1}]. \quad (16)$$

Для получения из (16) общего решения системы (10) достаточно, чтобы на $Z \times D$ не исчезал определитель $|E - A^{-1}kg'|$, в котором

$$A = [a_{ij}]; \quad a_{ij} = \partial\Omega_i/\partial y_j; \quad k = (\partial K/\partial y_i) \quad (\text{здесь } i, j = \overline{1,\ n-1}),$$
$$g' = (0, \ldots, 0, \partial\Omega_{n-2}/\partial u, \partial\Omega_{n-1}/\partial u); \quad u = y_n - K(z, y).$$

В общем случае общий инвариант системы (10) имеет вид $\Omega_i[y'_j, y'_n - K(z, y')]$, а ее общее решение получается из равенств $y'_i = f_i[y_n - K \mid h]$, если существует решение $K = R(y'_n, z, h')$ уравнения $K[y'_n - K \mid h'] = K$.

2. **Вырожденный случай.** Конкретизируем его рассмотрение условиями, не ограничивающими общности применяемого способа, но придающими бо́льшую наглядность результатам. Допустим, что группа φ, порождающая к. п. Θ, — нетривиальная равномерная по фазе группа (см. приложение III), а $S = S^*$ по условию вырожденности. Общим инвариантом уравнений (8) в предположениях приложения III группы T^0 будет система

$$y'_1 = \omega_1(x'); \ \ldots; \quad y'_{n-1} = \omega_{n-1}(x'); \quad y'_0 = \mu_0^{-1} \ln t' - \omega_n(x'),\ \omega_n(x') - s. \quad (17)$$

Тогда функции $y_0(x, t)$; $y_j(x)$; $y_n = \omega_n(x)$ — групповые переменные, в которых к. п. $x'' = \Theta(z, x')$ принимает вид

$$y''_j = y'_j;\ y''_0 = y'_0;\ y''_n = y'_n + S(z, y'_1, \ldots, y'_{n-1}, y'_n) \quad (j = \overline{1,\ n-1}). \quad (18)$$

По условию вырожденности $S = S^* = -y'_n + V(y'_0, y'_1, \ldots, y'_{n-1} \mid z)$, тогда из (18) имеем равенства

$$y''_j = y'_j; \quad y''_0 = y'_0, \quad (19)$$
$$y''_n = V(y''_j, y''_0, z). \quad (20)$$

Согласно (19), (20) преобразованные переменные для каждого фиксированного $z = z^0$ принадлежат поверхности (20), точки которой стационарны для вырожденного к. п. $\Theta^*(z, x')$, а все остальные точки пространства Y из $D_y \longleftrightarrow D_x$ проектируются на эту поверхность согласно отображению

$$y'_n \to y''_n = V(y'_j, y'_0, z); \quad y'_j \to y''_j = y'_j; \quad y'_0 \to y''_0 = y'_0. \quad (21)$$

Если порождающая система в переменных x задана уравнениями

$$dx_1/X_1(x \mid 0) = \ldots = dx_n/X_n(x \mid 0) = dt, \quad (22)$$

то в силу свойства группы T^0 в переменных y она имеет вид

$$dy_1/G_1(y_j) = \ldots = dy_n/G_n(y_j) = dy_0/[\mu_0^{-1}\exp(-\mu_0 y_0) - G_n(y_j)] \quad (23)$$

и обладает общим инвариантом

$$H_p(y_j) = h_p; \quad V(y_j) - y_n = h_n; \quad \exp\mu_0(y_0 + v) - \int_0^v R(\xi, h_p)\exp(\mu_0\xi)\,d\xi. \quad (24)$$

Здесь $H_p, V \in C^1$; $v = V(y_j)$; $p = \overline{1,\ n-2}$, а функция $R(\xi, h_p) =$

$=G_n^{-1}[\psi_j(\xi, h_p)]$, где $\psi_j(\xi, h_p)$ — решение системы $dz_j/d\xi = G_j(z_l)/\overset{-1}{G_n}(z_l)$, $z=-h_n$, $l=\overline{1, n-1}$.

Управляемая система, соответствующая (22) в переменных (17), принимает вид

$$dy'_j/Y'_j(y' \mid u) = dy'_n/Y'_n(y' \mid u) = dy'_0/Y'_0(y' \mid u). \quad (25)$$

Фиксируя $z=z^0$, применим к системе (25) вырожденное отображение (21). Это отображение определено формулами (19), (20) и эквивалентно ввиду гладкости $V(y', z^0)$ в окрестности простой точки проектированию поля направлений системы (25) на поверхность (20). Тогда получим систему

$$dy''_j \Big/ \left(Y'_j + m\frac{\partial V}{\partial y'_j} \right) = dy''_n / (Y'_n - m) = dy''_0 \Big/ \left(Y'_0 + m\frac{\partial V}{\partial y'_0} \right), \quad (26)$$

$$m = \langle Y', n\rangle \langle n, n\rangle^{-1}; \quad -n = \left(\frac{\partial V}{\partial y'_j}, \frac{\partial V}{\partial y'_0}, -1 \right); \quad y' \longleftrightarrow y'', y'_n \quad (27)$$

с интегральными кривыми на поверхности (20), в каждой точке которой поле направлений зависит от величины y'_n, которая из-за вырожденности не представима функцией от y''_j, y''_0, y''_n, z^0. Для эквивалентности систем (23) и (26) при однозначности поля, определенного системой (26) на поверхности (20), необходимо, чтобы функция $V(y'_j, y'_0, z)$ представлялась через произвольную функцию V_0 следующим образом: $V = z + V_0(y_j)$, а группа T^0 — была автоморфизмом (допускалась системой (26)). Введем функции $k_j(y_j) = G_j/G_n$, $k_0(y_j, y_0) = G_0/G_n$ и будем считать, что функции Y'_k $(k=\overline{0, n})$ в уравнениях (25) удовлетворяют по u условиям леммы Адамара. Тогда из требования эквивалентности систем (23) и (26) получим условия, определяющие допустимый класс регуляторов u^*, для которого система (23) является вырожденным к. п. системы (25).

Рассмотрим равенства

$$Y^0_0 = [\mu_0^{-1} \exp(-\mu_0 y'_0) - G_n] \exp(-\mu_0 y'_n); \quad Y^0_i = G_i \exp(-\mu_0 y'_n) \quad (i=\overline{1, n}),$$

$$Y'_0 = Y^0_0 - Z_i \frac{\partial \omega_n}{\partial x'_i}; \quad Y'_j = Y^0_j + Z_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x'_i} + m\,\partial V_0/\partial y'_j, \quad (28)$$

$$Y'_n = Y^0_n + Z_i \frac{\partial \omega_n}{\partial x'_i} - m. \quad (29)$$

Делением (28) на (29) получим уравнения эквивалентности

$$Y^0_j + Z_i\,\partial\omega_j/\partial x'_i + m^*_j = k_j Y'_n; \quad Y^0_0 - Z_i\,\partial\omega_n/\partial x' = k_0 Y'_n, \quad (30)$$

где $m^*_j = m\,\partial V_0/\partial y'_0$; $Z_i = Z_i(x' \mid u) \to R_i(y' \mid u)$; $x' = x'(y')$.

Дополняя эту систему строкой $u^0 = R_i \partial\omega_n/\partial x'_i$, где u^0 — произвольная функция от y', для определения u^* получим из (30) линейную систему, содержащую u^0 линейно

$$R_i\,\partial\omega_j/\partial x'_j = (k_j + \partial V_0/\partial y'_j)\,Y^0_0 - Y^0_j + [k_j(1-k_0) - k_0\,\partial V_0/\partial y'_j]\,Y_n - k_n u^0,$$

$$R_i\,\partial\omega_n/\partial x'_i = u^0 \qquad (k_n = k_0 k_j + (1-k_0)\,\partial V_0/\partial y'_j), \quad (31)$$

где все коэффициенты — заданные функции от y'. Отсюда следует, что допустимый класс u^*, если он существует, зависит от произвольной функции u^0. Инварианты системы y'' те же, что и для порождающей системы, и образуют серию (23). Первые $n-3$ из них сохраняются на u^* для системы y'.

3. Пример. Рассмотрим нелинейную систему [7] размерности 6, отвечающую гиростатическим системам (г. с.), содержащим маховики и вращающимся вокруг закрепленного центра масс под действием моментов от газовых рулей $(\bar{u}_1)$ и маховиков $(\bar{u}_2)$:

$$d\bar{x}_1/[\bar{x}'_1, B(\bar{x}'_1-\bar{x}'_2)]+u_1=d\bar{x}'_2/\bar{u}_2. \quad (32)$$

Здесь использованы обозначения

$$\bar{x}'_1=(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)'=K; \quad \bar{x}'_2=(x'_4,\ x'_5,\ x'_6)'=g\Omega+k;$$
$$\bar{u}_1=(u_1,\ u_2,\ u_3)'; \quad \bar{u}_2=(u_4,\ u_5,\ u_6)'; \quad K=G\Omega+k; \quad \Omega=B(\bar{x}_1-\bar{x}_2);$$
$$B=(G-g)^{-1},$$

где векторы K, Ω, k и матрицы G, g имеют обычный в теории г. с. смысл. Соответствующая управляемой системе (32) порождающая система

$$d\bar{x}_1/[\bar{x}_1, B(\bar{x}_1-\bar{x}_2)]=d\bar{x}_2/0 \quad (33)$$

имеет 5 общих инвариантов

$$\|\bar{x}_1\|^{-1}\|B^{1/2}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\|; \quad \bar{x}_2\|\bar{x}_1\|^{-1}; \quad \|\bar{x}_1\|^{-1}. \quad (34)$$

Система (33) имеет автоморфизм T^0 с параметром s

$$\bar{x}''_1=\bar{x}'_1\exp s; \quad \bar{x}''_2=\bar{x}'_2\exp s. \quad (35)$$

Согласно равенствам (17) переменные группы (35) определяются следующим образом:

$$\bar{y}'_1=\bar{x}'_1\|\bar{x}'_1\|^{-1}; \quad \bar{y}'_2=\bar{x}'_2\|\bar{x}'_1\|^{-1}; \quad y_7=\ln\|\bar{x}'_1\|. \quad (36)$$

Инварианты (34) порождающей системы в переменных (36) имеют вид

$$\|B^{1/2}(\bar{y}_1-\bar{y}_2)\|; \quad \bar{y}_2; \quad \exp y_7. \quad (37)$$

Функция S^*, задающая согласно (18) вырожденное к. п., представима выражением $S^*=-y'_7+V(\bar{y}'_1, \bar{y}'_2|z)$; в силу равенств (24) S^* одновременно представима функцией от инвариантов (37) и поэтому $V\equiv z$, так что $S^*=S^*_0=-\ln\|\bar{x}'_1\|+z$. Если подставить S^*_0 в формулы (35) вместо параметра, то получим $\bar{x}_1''=\bar{x}'_1\|x'_1\|^{-1}\exp z$ и вектор $\bar{x}'_1$ нельзя выразить через $\bar{x}_1''$, так что преобразования (35) — вырожденные при $S=S^*_0(x\,|\,z)$. Используя переменные (36), систему (25) и равенства (29), (30), получим допустимое управление (на котором система (32) есть вырожденное к. п. системы (33)) в виде решающей систему (31) вектор-функции u^*, заданной формулами $u^*_1=\lambda\bar{y}'_1$; $u^*_2=\lambda\bar{y}'_2$, в которых произвольная функция $u^0=\lambda(t', \bar{y}'_1, \bar{y}'_2, y'_7, z)$, что соответствует общему выводу. Первых 4 инварианта системы (37) не содержат переменной y_7. В силу общих выводов функции $\|B^{1/2}(\bar{x}'_1-\bar{x}'_2)\|\,\|\bar{x}_1\|^{-1}$, $\bar{x}'_2\|x'_1\|^{-1}$ должны оказаться инвариантами системы (1) при $u=u^*$. В этом можно убедиться дифференцированием этих функций в силу системы (32), где $u=u^*$.

Приложения

1. Конструктивное определение однопараметрической дифференцируемой композиционной группы преобразований. Пусть функция $\varphi(p, x)$ определена, принадлежит классу C^1 в области $G\{|p|<\infty,\ x\in D\}$ и задает группу преобразований в D, удовлетворяя равенствам

$$\varphi(p_2, \varphi(p_1, x))=\varphi(p_1+p_2, x); \quad \varphi(0, x)\equiv x;$$
$$\varphi^{-1}\in\{\varphi\}: x=\varphi(-p, x')=\varphi^{-1}(p, x), \quad x'=\varphi(p, x).$$

Пусть функция $S(z, x)\in C^1$ на G и обладает следующими свойствами: $S(0, x)\equiv 0$, $S(z, x)\neq 0$ для всех нестационарных в G точек x группы φ, на которых определены

[8] инварианты группы $\omega_j(x)$, $\omega_n(x) - p$ ($\omega_j, \omega_n \in C^1$; $j = \overline{1, n-1}$), причем функция S не представима на G в виде $S^* = -\omega_n(x) + V(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, z)$ (произвольная $V \in C^1$). Определим к. п. — множество преобразований $x' = \Theta(z, x)$, $\Theta \in C^1$ — равенством

$$x' = \varphi[S(z, x), x] = \Theta(z, x). \tag{1}$$

Можно убедиться, что принятые для φ и S свойства обеспечивают в G совпадение траекторий систем, соответствующих группе φ и к. п. (1), а также существование обратных отображений $\Theta^{-1} \in C^1$, $x = \Theta^{-1}(z, x')$.

Принято говорить, что множество преобразований $T(z)$ составляет группу, если выполняются условия: множество $T(z)$ содержит единичное преобразование I (это условие выполнено для $\hat{T}(z)$, определенного формулой (1), так как $\hat{T}(0) = I \leftrightarrow \Theta(0, x) \equiv x$) и на нем определена операция произведения преобразований $T(z_2) \times T(z_1) = T[\psi(z_2, z_1)]$, причем для любого z_1 обратное преобразование $T^{-1}(z_1)$ ($T^{-1}(z_1) \times T(z_1) = T$) принадлежит множеству $T(z)$, т. е. $T^{-1}(z_1) = T[\chi(z_1)]$, где ψ, χ — некоторые скалярные функции отмеченных аргументов. Если определить $T(z_2) \times T(z_1)$ равенством $x'' = \Theta[z_2, \Theta(z_1, x)]$ и рассмотреть преобразование на переменных группы $\varphi - y_i = \omega_i(x)$ (отображение $x \leftrightarrow y$ гомеоморфно и дифференцируемо в окрестности нестационарной точки x), то получим подобные (1) преобразования

$$y'_i = y_i; \quad y'_n = y_n + R(z, y_1, \ldots, y_n), \tag{2}$$

$$R(0, y) \equiv 0; \quad R(z, y) \in C^1; \quad R(z, y) \neq 0, \quad z \neq 0; \quad R(z, y) \leftrightarrow S(z, x), \tag{3}$$

для которых определения произведения и обратного преобразования при свойствах φ задают функцию

$$U(z_2, z_1, y) = R[z_2, y_{i1}, y_n + R(z, y)] + R(z_1, y). \tag{4}$$

Для того, чтобы преобразования (1) составляли группу, согласно определению необходимо, чтобы нашлась функция $g(z_2, z_1) \in C^1$, на которой U, данная равенством (4), обратилась бы в $R[g(z_2, z_1), y]$, причем уравнение $g(u, v) = 0$ имело бы единственное гладкое решение $u = \chi(v)$ для всяких $u, v \in (-\infty, +\infty)$. Отмеченные функциональные свойства R (и соответствующие свойства S) выполняются лишь на подклассе множества (3). Если предположить, что $\partial R/\partial y_n \equiv 0$ в G_φ, то окажется, что для всех точек траекторий системы (1) функция U, а следовательно, и $G(z_2, z_1, \ldots)$ не будут зависеть от параметра $p_n = \omega_n$, определяющего положение в инвариантном подпространстве (траекторий) системы (1). Аналогичным образом можно выделить подклассы T_α (для которых функция $G \to G(z_2, z_1, p_1, \ldots, p_\alpha)$, когда $S = S(z, p_1, \ldots, p_\alpha)$ при $\alpha < n$) так, чтобы область D_n расслаивалась на подобласти, в каждой из которых к. п. (1) обращалась в обычную группу относительно принятого определения произведения преобразований. В общем же случае функция $\Psi(z_2, z_1, x)$, соответствующая произведению, не сводится к $\Psi(z_2, z_1)$, хотя и определена в конечномерном квазивариантном пространстве $\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$, $\omega_n(x)$, поскольку $\Psi(z_2, z_1, x) = G(z_2, z_1, \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x))$. С другой стороны, вектор-функция $\Theta(z, x)$ — решение уравнений

$$dx'_1/\xi_1(x') = \ldots = dx'_n/\xi_n(x') = \lambda(z, x')dz, \tag{5}$$

в которых функции ξ и λ однозначно определяются соответственно функциями φ и S в области G, где $\lambda \not\equiv 0$ по определению S, поскольку считается, что все точки $x' \in D$ — неособые. Очевидно, интегральные кривые систем (5) и $\varphi(p)$ лежат на цилиндрах $\omega_{i1}(x') = c_{i1}$, а их проекции на фазовое пространство совпадают и являются силовыми линиями системы (5).

Используя систему (5) — дифференциальный эквивалент системы (1), — получаем аналогично [8] выражение для инфинитезимального оператора Z преобразований (1)

$$Z = \partial/\partial z + \lambda(z, x'')\xi_i(x'')\partial/\partial x''_i,$$

с помощью которого разложение аналитической функции $F'' = F(x'')$ в ряд Маклорена по z принимает вид

$$F'' = F(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\{Z^k \cdot F(x'')\} z^k_{(z=0)}; \qquad Z^k = Z \cdot Z^{k-1}.$$

В силу свойств функций φ, S и связи $\partial S/\partial z = \lambda[z, \Theta(z, x)]$ получаем аналогично [2] «уравнение причинности»

$$[1 + \xi_\nu(x)\int_0^z (\partial\lambda/\partial\Theta_k)(\partial\Theta_k/\partial x_\nu)d\tau]\partial\Theta_i/\partial z = \xi_\nu\lambda[z, \Theta]\partial\Theta_i/\partial x_\nu,$$

где $i, k, \nu = \overline{1, n}$; Θ_i — координата вектор-функции $\Theta(z, x)$, а одинаковые индексы определяют суммирование.

II. Теорема об условиях существования n-2 функционально независимых общих автономных инвариантов системы размерности $n+1$. Рассмотрим систему

$$dx_1/X_1(x, x_{n+1}) = \ldots = dx_n/X_n(x, x_{n+1}) = dx_{n+1}/X_{n+1}(x, x_{n+1}), \tag{1}$$

где $x_{n+1} = t$; $X_i(x, x_{n+1})$, $X_{n+1}(x, x_{n+1}) \in C^1$; $i = \overline{1, n}$, $x = \{x_i\}$; в D_{n+1} имеем

$$X_{n+1} \neq 0; \quad \|\{X_i\}\| \neq 0. \tag{2}$$

Установим для каких X справедливо утверждение: система (1) с функциями X из класса (2) имеет $n-2$ функционально независимых (ф. н.) общих инвариантов, не зависящих от x_{n+1} из класса C^1. Если ввести операторы $Z_1 = X_1\partial/\partial x_1 + \ldots + X_{n+1}\partial/\partial x_{n+1}$; $Z_2 = \partial/\partial x_{n+1}$, то утверждение равносильно существованию $n-2$ ф. н. решений в $D = D_{n+1}$ для системы

$$Z_1 \circ f \equiv Z \circ f \equiv 0. \tag{3}$$

После соответственной перенумерации система (3) равносильна [8] системе

$$Y_1^0 \circ f \equiv Y_2^0 \circ f \equiv 0, \tag{4}$$

где

$$Y_1^0 = Y_1\,\partial/\partial x_1 + \ldots + Y_{n-1}\,\partial/\partial x_{n-1} + \partial/\partial x_n; \quad Y_2^0 = \partial/\partial x_{n+1};$$

$$Y_j = X_j X_n^{-1}; \quad \dot{Y}_j = \partial Y_j/\partial X_{n+1}; \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Коммутатор $Y_3^0 = Y_2^0 Y_1^0 - Y_1^0 Y_2^0 = \dot{Y}_j\,\partial/\partial x_j$ может образовывать вместе с Y_1^0, Y_2^0 зависимую систему, если найдутся одновременно неисчезающие $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$, для которых $\lambda_1 Y_1^0 + \lambda_2 Y_2^0 + \lambda_3 Y_3^0 = 0$. Поскольку $\lambda_2 \equiv 0$, то $Y_1^0 = \lambda'_1 Y_3^0$ либо $Y_3^0 = \lambda'_3 Y_1^0$. Первое невозможно, а второе означает, что $Y_3^0 = 0$, т. е. все $\dot{Y}_j = 0$, и тогда $X_j = Z_j(x_1, \ldots, x_n) X_n(x, x_{n+1})$. Отсюда следует, что Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0 зависимы тогда и только тогда, когда система (1) дает систему $dx_1|Z_1(x) = \ldots = dx_{n-1}|Z_{n-1}(x) = dx_n$, а последняя обладает системой $n-1$ ф. н. общих инвариантов, не содержащих x_{n+1}. Исключая этот частный случай, будем считать, что операторы Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0 независимы, а для Y_3^0 имеем равносильный оператор $Y'_3 = Y'_1\partial/\partial x_1 + \ldots + Y'_{n-2}\partial/\partial x_{n-2} + \partial/\partial x_{n-1}$, где $Y'_k = \dot{Y}_k/\dot{Y}_{n-1}$ $(k = \overline{1, n-2})$. Тогда система Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0 равносильна системе T_1, T_2, T_3, где

$$T_1 = Y''_k\partial/\partial x_k + \partial/\partial x_n; \quad T_2 = \partial/\partial x_{n+1}; \quad T_3 = Y'_k\partial/\partial x_k + \partial/\partial x_{n-1}, \tag{5}$$

$$Y'_k = \dot{Y}_k \dot{Y}_{n-1}^{-1} = (X_n\dot{X}_k - X_k\dot{X}_n)(X_n\dot{X}_{n-1} - X_{n-1}\dot{X}_n)^{-1},$$

$$Y''_k = Y_k - Y_{n-1}Y'_k = X_k\dot{X}_{n-1} - X_{n-1}\dot{X}_k. \tag{6}$$

Для того, чтобы система (3) имела $n-2$ ф. н. общих инварианта необходимо и достаточно [8], чтобы в D коммутаторы якобиевой системы операторов T_1, T_2, T_3 исчезали

$$T_1T_2 - T_2T_1 = 0, \tag{7}$$

$$T_1T_3 - T_3T_1 = 0, \tag{8}$$

$$T_2T_3 - T_3T_2 = 0. \tag{9}$$

Система (7) эквивалентна равенствам

$$\ddot{X}_k X_k^{-1} - \ddot{X}_{n-1} X_{n-1}^{-1} = 0. \tag{10}$$

Система (9) эквивалентна условиям

$$(\ddot{X}_{n-1} X_{n-1}^{-1} - \ddot{X}_n X_n^{-1})(\dot{X}_k X_k^{-1} - \dot{X}_{n-1} X_{n-1}^{-1}) = 0, \tag{11}$$

которые означают, что в D исчезают все сомножители вида

$$\dot{X}_k X_k^{-1} - \dot{X}_{n-1} X_{n-1}^{-1} = 0 \tag{12}$$

или система (11) эквивалентна условию

$$\ddot{X}_{n-1}X_{n-1}^{-1}-\ddot{X}_{n}X_{n}^{-1}=0. \tag{13}$$

Заметим, что условия (10) — следствия условий (12), для последних же $Y_k''=0$, $T_1=\partial/\partial x_n$. Из условий (12) следует, что величины Y_k выражаются так:

$$Y_k=f_k(x_i)\,Y_{n-1}(x_i, x_{n+1}), \tag{14}$$

где $i=\overline{1,n}$; f — произвольная функция.
Подстановка выражений (14) в условия (8) приводит к равенствам $\partial f_k/\partial x_n\equiv 0$, иначе говоря, уравнения $Y_k=f_k(x_1, \ldots, x_{n-1})Y_{n-1}(x, x_{n+1})$ на функции X определяют первый класс $\{X\}$, на котором теорема доказана, поскольку на этом классе система (1) приобретает вид

$$dx_1/f_1(x_1, \ldots, x_{n-1})X_{n-1}=\ldots=dx_{n-2}/f_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-1})X_{n-1}=$$
$$=dx_{n-1}/X_{n-1}=dx_n/X_n=dx_{n+1}/X_{n+1},$$

обладая, очевидно, ф. н. общими инвариантами $h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots, h_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-1})$.
Условия, определяющие второй класс, выражаются уравнениями (8), (10) и (13), из которых следует, что для всех $i=\overline{1,n}$; $m=1,\ n-2$; $k=1,\ n-2$ должны выполняться соотношения

$$Y_k=f_k(x_i)Y_{n-1}+g_k(x_i); \quad Y'_k=f_k(x_i); \quad Y''_k=g_k(x_i), \tag{15}$$

$$[f_m(x_i)\partial/\partial x_m+\partial/\partial x_{n-1}]\circ g_k(x_i)-[g_m(x_i)\partial/\partial x_m+\partial/\partial x_n]\circ f_k(x_i)\equiv 0. \tag{16}$$

Система (16) равносильна условию коммутации операторов

$$F=f_m(x_i)\partial/\partial x_m+\partial/\partial x_{n-1}; \quad G=g_m(x_i)\partial/\partial x_m+\partial/\partial x_n,$$

которое выражается $n-2$ уравнениями на $2(n-2)$ функций $f, g\in C^1$. Пусть $f=(f_1, \ldots, f_{n-2}, 1, 0)'$, а $y_i=\omega_i(x_1, \ldots, x_n)$ — ф. н. система, $\omega\in C^2$ в области D, удовлетворяющая в этой области соотношениям

$$\langle f, \nabla\omega_j\rangle=0, \quad j=\overline{1,\ n-1}; \quad \langle f, \nabla\omega_n\rangle=1, \tag{17}$$

которые однозначно определяют в D_x вектор-функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, а вместе с нею и $f'(y)=f(x(y))$ на $D_y\leftrightarrow D_x$. Согласно уравнениям (16) функции $g'_k(y)=g_k(x(y))$ удовлетворяют системе

$$\partial g'_k/\partial y_n=(\partial f'_k/\partial y_i)(\partial y_i/\partial x_m)g'_m+(\partial f'_k/\partial y_i)(\partial y_i/\partial x_n), \tag{18}$$

которая эквивалентна некоторой неоднородной системе линейных уравнений с соответствующими (18) и (17) матрицей A и векторами z, b вида

$$dz/d\tau=A(\tau, y_1, \ldots, y_n)z+b(\tau, y_1, \ldots, y_n). \tag{19}$$

Таким образом, задаваясь любой ф. н. системой $\omega_n\in C^2$ и решениями системы (18) (типа 19), получаем согласно равенствам (15) условия, определяющие второй класс $\{X\}$, для которого справедлива теорема.

III. Лемма о группах, допускаемых автономной системой

$$dx_1/X_1(x_1, \ldots, x_n)=\ldots=dx_n/X_n(x_1, \ldots, x_n)=dt. \tag{1}$$

Известно, что группа T с инфинитезимальным оператором $(i=\overline{1,n})$ $T'=\xi_i\partial/\partial x_i+\xi_0\partial/\partial t$ допускается системой (1) с инфинитезимальным оператором $Z=X_i\partial/\partial x_i+\partial/\partial t$, если найдется функция $\lambda(t,x)$, удовлетворяющая системе уравнений

$$ZT'-T'Z=\lambda Z, \tag{2}$$

для которой в данном случае $\lambda=Z\xi_0$. Заметим, что если группа допускается системой (1), то она допускается любой ее подсистемой, иначе говоря, уравнения

$$VT'-T'V=\mu V \quad (V=X_i\partial/\partial x_i) \tag{3}$$

есть следствие уравнений (2), а тогда из систем (2) и (3) получаем выражения

$$\lambda=Z\xi_0; \quad V\circ\xi_0=0. \tag{4}$$

Исследование систем (2)—(4) приводит к заключению, что функции ξ_i, ξ_0 инфинитезимального оператора группы T, допускаемой системой (1), должны выражаться формулами

$$\xi_i=PX_i+g_i; \quad \xi=P+M, \tag{5}$$

в которых функции P, M, ξ_0 и $g_i(x)$, определяющие оператор $G=g_i(x)\partial/\partial x_i$ $(i=\overline{1,n})$, связаны уравнениями

$$V \circ P = \mu(t,x) - \mu(0,x); \quad V \circ \mu + \partial\mu/\partial t \equiv 0; \quad M = \int_0^t \mu(\tau,x)d\tau,$$

$$V \circ g_i - G \circ X_i = \mu(0,x)X_i; \quad V \circ \xi_0 = 0. \tag{6}$$

Тогда дифференциальные уравнения группы, допускаемой автономной системой (1), выражаются строкой

$$dx'_1/PX_1 + g_1 = \ldots = dx'_n/PX_n + g_n = dt'/P + M = ds, \tag{7}$$

в которой функции P, M, g_i удовлетворяют условиям (6). Группа T_0 с инфинитезимальным оператором $P(X_i\partial/\partial x_i + \partial/\partial t)$ всегда допускается автономной системой (1) и поэтому тривиальна. Назовем допускаемую (1) группу T нетривиальной, если в системе (7) $P \equiv 0$. Если скорость преобразования t, равная ξ'_0, не зависит от траекторий системы (1), то скажем, что группа T равномерна по фазе. Из этих определений в силу уравнений (6) и (7) нетрудно заключить, что нетривиальная и равномерная по фазе группа T^0 должна определяться уравнениями

$$dx'_1/g_1(x') = \ldots = dx'_n/g_n(x') = dt'/\mu_0 t' = ds, \tag{8}$$

где $\mu_0 = \text{const}$, для которой система $V \circ g'_i - GX_i = \mu_0 X_i$ имеет в D нетривиальное решение из класса C^1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейс И. А., Некоторые свойства инвариантов управляемых систем, Ин-т киберн. АН ЭССР, Препринт № 5, Таллин, 1972.
2. Беллман Р., Процессы регулирования с адаптацией, М., 1964, с. 60—64.
3. Парс Л., Аналитическая динамика, М., 1971, с. 511—570.
4. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, М., 1958, с. 343—350.
5. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1964, с. 197—200.
6. Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, Минск, 1970, с. 130—146, 222—223.
7. Кейс И. А., Об интегралах гиростатов в поле сил, зависящем от кинетического момента и угловой скорости, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 177 (1968).
8. Гурса Э., Курс математического анализа, 2, М., 1936, с. 510—525.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/XII 1972

I. KEIS

DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE MINGI TEISENDUSTE KLASSIGA EKVIVALENTSEST JUHTIMISEST

Artiklis esitatakse tarvilikud ja piisavad tingimused regulaatorite sellise üheparameetrilise klassi määramiseks, milles juhitav süsteem on genereeriva süsteemi kompositsioonrühma teisendus. Tuletatakse üldiste invariantide ja juhtiva süsteemi vektorlahendi üldisteks invariantideks teisenduse kuju ja genereeriva süsteemi vektorlahend lubatavate regulaatorite klassis. Lisas I on antud kompositsioonrühma teisenduse definitsioon ja põhiomadused. Mitteautonoomsete n-järku süsteemide jaoks, milledel vastavalt lisas I tõestatud teoreemile on n-2 autonoomset invarianti, lihtsustub invariantsete hulkade teisendamise valem oluliselt. On konstrueeritud regulaatorite klass, kus juhitav osutub kõdunud kompositsioonrühma teisenduseks teda esile kutsunud süsteemile, mis omakorda eeldab faasi järgi ühtlast mittetriviaalset rühma, mille kuju on määratud lisas III antud lemma tingimustega.

I. KEIS

ON CONTROLS EQUIVALENT TO SOME TRANSFORMATION CLASSES OF DYNAMICAL SYSTEMS

Necessary and sufficient conditions on controls, determining one-parameter class of controllable systems as composition-group transformations (c. g. t.) of a generating system are discussed in the paper. The form of transformation between vector solution, Invariants of the generating system and corresponding values of controllable systems are determined for this class of controls. Constructive definition for the c. g. t. together with its principal qualities are given in Appendix I. A simplification of the transformations takes place when an n-dimensional, non-autonomous system possesses n-2 autonomous invariants (presented in Appendix II theorem). In case of defected c. g. t. when the generating system admits phase-uniform, non-trivial group (of the kind prescribed by lemma in Appendix III), the conditions of equivalent controls take the form of linear equations.