EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.3.01

УДК 517.949.8

Х. ЙОКК

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

В статье исследуется сходимость методов для дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами на неравномерной сетке. Аналогичные вопросы при равномерной сетке рассмотрены нами ранее в [1].

1. Будем рассматривать краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} Lu &\equiv -[k(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = f(x), \\ l_1u &\equiv \nu_1 u(0) - k(0)u'(0) = \mu_1, \\ l_2u &\equiv \nu_2 u(1) + k(1)u'(1) = \mu_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ν_1, ν_2 и μ_1, μ_2 — некоторые постоянные, а функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ могут, вообще говоря, иметь конечное число разрывов первого рода.

С точки зрения практики (например, при рассмотрении физических явлений) представляют интерес такие решения краевой задачи (1), которые в точках разрыва коэффициентов удовлетворяют соотношениям

$$u_+ = u(x+0) = u(x-0) = u_-, \qquad k_+u'_+ = k_-u'_-.$$

В дальнейшем, говоря о решении задачи (1), будем предполагать, что последние равенства выполнены, а функция $k(x)$ на отрезке $[0,1]$ удовлетворяет условию $|k(x)| > k_0 > 0$. При этом $k(x)$ может менять знак на этом отрезке. Пусть $\Delta \equiv 1/\nu_1 + 1/\nu_2 + \int\limits_0^1 dx/k(x) \neq 0$. Рассмотрим неравномерную сетку $\hat{\omega}_h$ на отрезке $[0, 1]$, т. е. сетку, удовлетворяющую условию $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$. Используя разностные производные

$$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h_{i+1}, \qquad y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h_i, \qquad y_{\hat{x}} = (y_{i+1} - y_i)/\hbar_i,$$

где

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \hbar_i = 0{,}5(h_i + h_{i+1}),$$

составим дискретную задачу (разностную схему)

$$\left.\begin{aligned} L_h y &\equiv -(a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy = \varphi, \\ l_{1h} y &\equiv \nu_1 y_0 - a_1 y_{x,0} = \mu_1 + 0{,}5 h_1 (\varphi_0 + d_0 y_0), \\ l_{2h} y &\equiv \nu_2 y_n + a_n y_{\bar{x},n} = \mu_2 + 0{,}5 h_n (\varphi_n + d_n y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

в которой коэффициенты $a_i (a_i \neq 0)$, d_i, φ_i являются постоянными.

Рассмотрим в первую очередь случай, когда выполнены следующие условия *:

$$k(x) \in Q^{(2)}, \quad f(x), q(x) \in Q^{(1)}; \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_i = \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),\\
&d_i = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx \quad (i=1, 2, \ldots, n-1),\\
&d_0 = \frac{2}{h_1} \int_{x_0}^{x_{1/2}} q(x)\,dx, \quad \varphi_0 = \frac{2}{h_1} \int_{x_0}^{x_{1/2}} f(x)\,dx,\\
&d_n = \frac{2}{h_n} \int_{x_{n-1/2}}^{x_n} q(x)\,dx, \quad \varphi_n = \frac{2}{h_n} \int_{x_{n-1/2}}^{x_n} f(x)\,dx.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если известны точки разрывов функций k, q и f, то можно выбрать неравномерную сетку так, чтобы среди узлов были и все точки разрывов функций k, q, f. Такую сетку обозначим через $\hat{\omega}_h(k, q, f)$.

Теорема 1. *Пусть краевая задача* (1) *имеет единственное решение* $u^*(x)$ *и пусть выполнены условия* (3) *и* (4). *Тогда аппроксимирующая задача* (2) *при достаточно малых* $h_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i$ *обладает единственным решением* $y_h^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$. *При этом, в случае сеток* $\hat{\omega}_h(k, q, f)$ *имеет место неравенство*

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i^* - u^*(x_i)| \leqslant c\bar{h}^2, \quad \bar{h} = \sqrt{h_1^2 + h_2^3 + h_3^3 + \ldots + h_{n-1}^3 + h_n^2}, \tag{5}$$

а в случае произвольных неравномерных сеток — неравенство

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i^* - u^*(x_i)| \leqslant c h_0^2. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $G(x, \xi)$ — функция Грина дифференциального выражения $-[k(x)u'(x)]'$ при краевых условиях $l_1 u = 0$ и $l_2 u = 0$, G_{ij} — дискретная функция Грина для аналогичной дискретной задачи. В данном случае

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(x)\beta(\xi)}{\Delta}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\beta(x)\alpha(\xi)}{\Delta}, & \xi \leqslant x \leqslant 1; \end{cases} \qquad G_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i \beta_j}{\delta_n}, & 0 \leqslant i \leqslant j, \\ \dfrac{\beta_i \alpha_j}{\delta_n}, & j \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

---

* Мы пользуемся обозначениями: $C^{(r)}$ — класс r раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$, а $Q^{(r)}$ — класс r раз кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$, т. е. функция $u \in Q^{(r)}$, если u непрерывно дифференцируема r раз, за исключением конечного числа точек разрывов, где функция u и ее производные имеют конечные односторонние пределы на этом отрезке.

где

$$\alpha(x)=\frac{1}{\nu_1}+\int_0^x \frac{ds}{k(s)}, \qquad \beta(x)=\frac{1}{\nu_2}+\int_x^1 \frac{ds}{k(s)},$$

$$\Delta=\alpha(x)+\beta(x)=\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\int_0^1 \frac{dx}{k(x)},$$

$$\alpha_j=\frac{1}{\nu_1}+\sum_{i=1}^{j}\frac{h_i}{a_i}, \qquad \beta_j=\frac{1}{\nu_2}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{h_i}{a_i},$$

$$\delta_n=\alpha_j+\beta_j=\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j}{a_j}.$$

Тогда задачи (1) и (2) соответственно эквивалентны следующим уравнениям второго рода:

$$u=Tu+b, \qquad y_h=T_h y_h+b_h,$$

где

$$Tu=\int_0^1 G(x,\xi)\,q(\xi)\,u(\xi)\,d\xi, \quad b=\int_0^1 G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi+G(x,0)\,\mu_1+G(x,1)\,\mu_2,$$

$$[T_h y_h]_i=\sum_{j=0}^{n}\hbar_j G_{ij} d_j y_j, \quad [b_h]_i=\sum_{j=0}^{n}\hbar_j G_{ij}\varphi_j+G_{i0}\mu_1+G_{in}\mu_2 \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

$$\hbar_j=\begin{cases}0{,}5(h_j+h_{j+1}) & \text{при } j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\\ 0{,}5h_{j+1} & \text{при } j=0,\\ 0{,}5h_j & \text{при } j=n.\end{cases}$$

Пусть p_h — оператор, сопоставляющий каждой функции $u(x)$ вектор

$$p_h u=(u(x_0),\ u(x_1),\ \ldots,\ u(x_n))\in m_{n+1}.$$

Аналогично тому, как это сделано в книге Г. М. Вайникко ([2], с. 153), можем показать, что последовательность линейных операторов $T_h\in L(m_{n+1}, m_{n+1})$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный линейный оператор $T\in L(C, C)$ по отношению к связывающим отображениям $p_h\in L(C, m_{n+1})$. Поэтому согласно приведенной в [2] теореме 2.1 уравнение $y_h=T_h y_h+b_h$ при достаточно малых h_0 однозначно разрешимо и справедлива оценка

$$\|y_h^*-p_h u^*\|_{m_{n+1}}\leqslant c\|p_h Tu^*-T_h p_h u^*\|_{m_{n+1}}+\|p_h b-b_h\|_{m_{n+1}}. \tag{7}$$

Кроме того, по формуле Тейлора можно доказать, что

1° $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\left|\int_0^1 G(x_i,\xi)\,q(\xi)\,u^*(\xi)\,d\xi-\sum\limits_{j=0}^{n}\hbar_j G_{ij} d_j u^*(x_j)\right|\leqslant ch^2,$

2° $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\left|\int_0^1 G(x_i,\xi)\,f(\xi)\,d\xi-\sum\limits_{j=0}^{n}\hbar_j G_{ij}\varphi_j\right|\leqslant ch^2,$

3° $\max\limits_{0\leqslant i,\ j\leqslant n}|G(x_i,x_j)-G_{ij}|\leqslant ch^2,$

где $h=h_0$ в случае произвольной неравномерной сетки и $h=h$ в случае сетки $\hat{\omega}_h(k, q, f)$. Из неравенств 1°—3° и (7) следуют утверждения (5) и (6) теоремы.

2. Следуя А. А. Самарскому ([3], с. 136), вычислим коэффициенты** a_i, d_i, φ_i при помощи шаблонных функционалов. Тогда справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} &a_i=k(x_i-0{,}5h_i)+O(h_i^2),\\ &d_i=\frac{h_iq_i^-+h_{i+1}q_i^+}{2\hbar_i}+\alpha(h^2q'^-)_{\hat{x},i}+O(\hbar_i^2),\\ &\varphi_i=\frac{h_if_i^-+h_{i+1}f_i^+}{2\hbar_i}+\alpha(h^2f'^-)_{\hat{x},i}+O(\hbar_i^2) \qquad (\alpha=\text{const}). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Теперь можно доказать следующую теорему, справедливую для всех коэффициентов, выраженных через такие шаблонные функционалы.

Теорема 2. *Пусть краевая задача* (1) *имеет единственное решение* $u^*(x)$ *и функции* $k, q, f\in Q^{(2)}$. *Тогда любая аппроксимирующая задача* (2) *из семейства* (8) *имеет при достаточно малых* h_0 *единственное решение* $y_h^*=(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$. *При этом на последовательности сеток* $\hat{\omega}_h(k, q, f)$ *имеет место неравенство*

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}|y_i^*-u^*(x_i)|\leqslant c\bar{h}^2. \tag{9}$$

На любой последовательности неравномерных сеток неравенство (9) *справедливо при* $k(x), q(x), f(x)\in C^{(2)}$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Используя формулу Тейлора и равенства (8), можно проверить выполнение неравенства 1°—3° при $h=\bar{h}$. Тогда из неравенства (7) и вытекает выполнение условия (9).

3. Рассмотрим теперь задачу о собственных значениях

$$Lu=\lambda f(x)u(x), \qquad l_1u=0, \qquad l_2u=0 \tag{10}$$

и соответствующую ей дискретную задачу

$$L_hy=\lambda\varphi y, \qquad l_{1h}y=0, \qquad l_{2h}=0 \tag{11}$$

на неравномерной сетке.

Задачи (10) и (11) эквивалентны соответственно задачам

$$u-Tu=\lambda Su, \qquad y_h-T_hy_h=\lambda S_hy_h,$$

где при $i=0, 1, \ldots, n$

$$Su=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)u(\xi)d\xi, \qquad [S_hy_h]_i=\sum_{j=0}^{n}\hbar_jG_{ij}\varphi_jy_j.$$

Решение задачи (10) о собственных значениях дает следующая

Теорема 3. *Пусть нуль не является собственным значением задачи* (10) *и пусть выполнено одно из условий* (4) *или* (8). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

** Коэффициенты a_i, d_i и φ_i вычислены в [3] соответственно через функционалы $A[k(x_i+sh_i)]$, $F[q^*(s)]$ и $F[f^*(s)]$.

1) *каждое собственное значение* λ_0 *задачи* (10) *является пределом при* $h_0 \to 0$ *собственных значений* λ_h *задачи* (11) *и, наоборот, собственные значения задачи* (11) *могут при* $h_0 \to 0$ *сгущаться только к собственным значениям задачи* (10);

2) *при* $h_0 \to 0$ *имеет место сходимость*

$$\mathfrak{D}_h \equiv \sup_{y_h \in \mathfrak{Y}_h,\, \|y_h\|_{m_{n+1}}} \inf_{u_0 \in \mathfrak{U}_0} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i - u_0(x_i)| \to 0,$$

$$\mathfrak{D}'_h \equiv \sup_{u_0 \in \mathfrak{U}_0,\, \|u_0\|_C = 1} \inf_{y_h \in \mathfrak{Y}_h} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i - u_0(x_i)| \to 0,$$

где $\mathfrak{U}_0$ — *корневое подпространство оператора* $(I - T)^{-1}S$, *соответствующее собственному значению* $\lambda_0 \neq 0$ *и* $\mathfrak{Y}_h$ — *линейная оболочка тех корневых подпространств оператора* $(I_h - T_h)^{-1}S_h$, *которые соответствуют близким к* λ_0 *собственным значениям оператора* $(I_h - T_h)^{-1}S_h$;

3) *пусть* $c = \mathrm{const}$ *и* l — *ранг собственного значения* λ_0 *задачи* (10), *тогда справедливы оценки*

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leqslant c\overline{h}^{2/l}, \quad \mathfrak{D}_h \leqslant c\overline{h}^{2/l}, \quad \mathfrak{D}'_h \leqslant c\overline{h}^{2/l}$$

в случаях, когда коэффициенты вычисляются а) *на сетке* $\hat{\omega}_h(k, q, f)$ *по формулам* (4) *и* $k(x) \in Q^{(2)}$, $q(x)$, $f(x) \in Q^{(1)}$; б) *на сетке* $\hat{\omega}_h(k, q, f)$ *по формулам* (8) *и* $k(x)$, $q(x)$, $f(x) \in Q^{(2)}$; в) *на произвольной неравномерной сетке по формулам* (8) *и* $k(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C^{(2)}$.

Доказательство. Утверждения этой теоремы следуют из компактной аппроксимации операторов T и S последовательностью операторов T_h и S_h, а также из того, что выполнены условия 1°—3° (см. [4, 2]).

Замечание 1. Если функции $k(x)$, $q(x)$ положительны, то $l = 1$. В общем случае, по-видимому, $l \neq 1$ и собственные значения задачи (10) могут быть комплексными.

Замечание 2. Аналогичные теоремам 1 и 3 из статьи [1] результаты можно доказать и для неравномерных сеток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иокк Х. А., О сходимости разностных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **22**, 31 (1973).
2. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений, Тарту, 1970.
3. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.
4. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация линейных операторов в факторпространствах, Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, вып. 220, 170 (1968).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
28/XII 1972

H. JOKK

TEIST JÄRKU HARILIKE DIFERENTSIAALVÕRRANDITE DIFERENTSSKEEMIDE KOONDUVUS MITTEÜHTLASEL VÕRGUL

Artiklis uuritakse diferentsskeemide klasside (2) ja (8) koondumist mitteühtlasel võrgul katkevate kordajatega hariliku teist järku diferentsiaalvõrrandi rajaülesande (1) ja vastava omaväärtusülesande korral, kasutades kompaktse aproksimatsiooni printsiipi. See võimaldab loobuda käsitletava ülesande positiivse määratuse nõudest, mida A. Samarski töödes (vt. [3]) peetakse aprioorsete hinnangute tuletamisel peamiseks.

H. JOKK

THE CONVERGENCE OF THE DIFFERENCE SCHEMES OF THE ORDINARY SECOND-DEGREE DIFFERENTIAL EQUATIONS ON A NON-HOMOGENEOUS GRID

Using the compact approximation principle, a study has been carried out of the convergence of difference scheme classes (2), (8) on a non-homogeneous grid for the boundary value of the ordinary second-degree differential equations with non-continuous coefficients and respective eigenvalue problems.

The use of compact approximation principle permits the above-mentioned problems to be solved without the differential operator having been defined positively, the latter being the main requirement advanced in A. Samarsky's works [3] on the derivation of *a priori* estimations.