видна примыкающая к линии КР кривая характерного вида, которую мы склонны интерпретировать как фононное крыло линии КР. Это означает, что наблюдается процесс КР второго порядка — при рассеянии рождаются один квант локального колебания примесной молекулы и, по меньшей мере, один «фонон решетки» — малый квант колебаний матрицы. В итоге мы приходим к заключению, что налицо основные характерные черты квазилинейчатого спектра КР света примесным центром кристалла [5].

Перилен в н. гептане и н. гексане. В данных растворителях нами также наблюдалась линия КР с частотой 357 *см*$^{-1}$; в н. гептане появляется линия КР с частотой 545 *см*$^{-1}$. Результаты опытов в основном те же. К подробностям КР спектров мы обратимся в следующей публикации.

В заключение выражаю благодарность К. Ребане за руководство настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ребане К. К., Вторичное свечение примесного центра, ИФА АН ЭССР, Тарту, 1970.
2. Hizhnyakov V., Tehver I., Phys. stat. solidi, **39**, 67 (1970).
3. Тамм Т. Б., Опт. и спектр., **32**, 623 (1972).
4. Ребане К., Саари П., Тамм Т., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 251 (1970).
5. Преэм Р. А., Ребане К. К., Хижняков В. В., Тр. ИФА АН ЭССР, Вып. 20, 157 (1963).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
13/III 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.3.19

УДК 512.86

Р. ТАВАСТ

О ФАКТОРИЗАЦИИ БЛОЧНОЙ МАТРИЦЫ

R. TAVAST. BLOKKMAATRIKSI FAKTORISEERIMISEST

R. TAVAST. ON FACTORIZATION OF A PARTITIONED MATRIX

При исследовании систем линейных уравнений может возникать следующая задача. Задана квадратная неособенная матрица A порядка n, которая при помощи вертикальных и горизонтальных линий разделена на прямоугольные блоки,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix},$$

причем диагональные блоки $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{mm}$ — квадратные матрицы порядков $n_1, n_2, \dots, n_m$ соответственно, $n = \Sigma n_i$. Кроме того, главные подматрицы

$$A_1 = A_{11},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_{m-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,m-1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} & \dots & A_{m-1,m-1} \end{bmatrix}$$

неособенны.

Назовем любую квадратную порядка n матрицу B конформной матрице A, если B разделена на блоки при помощи линий, расположенных одинаково с линиями в матрице A.

Требуется факторизировать A, т. е. определить конформные A матрицы

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & \dots & 0 \\ P_{21} & P_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mm} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} I_1 & Q_{12} & \dots & Q_{1m} \\ 0 & I_2 & \dots & Q_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & I_m \end{bmatrix}$$

такие, что

$$A = PQ. \tag{1}$$

Через $I_1, \dots, I_m$ обозначены единичные матрицы порядков $n_1, \dots, n_m$ соответственно. Факторизация (1) единственна.

В данном сообщении приведены формулы, выражающие блоки матриц P и Q через блоки A.

Формулы блочной факторизации

Введем, следуя [1], прямоугольные $(n_i \times n_j)$-матрицы $Z_{ij}^{(p)}$, определяемые рекуррентно

$$Z_{ij}^{(1)} = A_{ij},$$

$$Z_{ij}^{(p)} = Z_{ij}^{(p-1)} - Z_{i,p-1}^{(p-1)} Z_{p-1}^{-1} Z_{p-1,j}^{(p-1)}, \tag{2}$$

$$i = 1, \dots, m, \; p = 2, \dots, q,$$

$$q = \min(i, j),$$

где через Z_p обозначается матрица $Z_{pp}^{(p)}$.

Тогда решение поставленной задачи дается следующими формулами:

$$P_{ij}=\begin{cases} Z_{ij}^{(j)}, & i\geqslant j,\\ 0, & i<j;\end{cases}\qquad Q_{ij}=\begin{cases} Z_i^{-1}Z_{ij}^{(i)}, & i\leqslant j,\\ 0, & i>j.\end{cases}\tag{3}$$

Докажем справедливость (3) прямой подстановкой. Умножение i-й блочной строки P справа на j-й блочный столбец Q дает матрицу

$$\sum_{s=1}^{q} Z_{is}^{(s)} Z_s^{-1} Z_{sj}^{(s)},$$

которая равна A_{ij}. Действительно, перепишем (2) для $p=q$ в виде

$$Z_{ij}^{(q)}=Z_{ij}^{(1)}-\sum_{s=1}^{q-1} Z_{is}^{(s)} Z_s^{-1} Z_{sj}^{(s)},$$

откуда с учетом тождеств

$$Z_{ij}^{(i)}=Z_{ii}^{(i)} Z_i^{-1} Z_{ij}^{(i)} \quad \text{для} \quad q=i$$

или

$$Z_{ij}^{(j)}=Z_{ij}^{(j)} Z^{-1} Z_{jj}^{(j)} \quad \text{для} \quad q=j$$

приходим к

$$Z_{ij}^{(1)}=\sum_{s=1}^{q} Z_{is}^{(s)} Z_s^{-1} Z_{sj}^{(s)}.$$

Остается показать, что $Z_{ij}^{(p)}$, $i, j=1, \ldots, m$, $p=2, \ldots, q$, существуют при сделанных предположениях о матрице A.

Любая главная подматрица A_k, $k=2, \ldots, m$, может быть разбита на блоки следующим образом:

$$A_k=\begin{bmatrix} A_{k-1} & B_k\\ C_k & D_k\end{bmatrix}.$$

Допслнением в смысле Шура матрицы A_{k-1} в матрице A_k называется матрица

$$D_k-C_k A_{k-1}^{-1} B_k,$$

обозначаемая через (A_k/A_{k-1}). Заметим, что согласно определению (2) $Z_k=(A_k/A_{k-1})$, $k=2, \ldots, m$, $Z_1=A_1$.

Из формулы Шура (см. [2], с. 45)

$$\det A_k=(\det A_{k-1})(\det(A_k/A_{k-1}))$$

и неособенности A_k, $k=1, \ldots, m$, вытекает неособенность всех дополнений (A_k/A_{k-1}), $k=2, \ldots, m$. Следовательно, все $Z_{ij}^{(p)}$, $i, j= =1, \ldots, m$, $p=1, \ldots, q$, существуют.

Пример.

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ Z_{21}^{(1)} & Z_2 & 0 \\ Z_{31}^{(1)} & Z_{32}^{(2)} & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Z_1^{-1} Z_{12}^{(1)} & Z_1^{-1} Z_{13}^{(1)} \\ 0 & I & Z_2^{-1} Z_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = A_{11}, \quad Z_{12}^{(1)} = A_{12}, \quad Z_{21}^{(1)} = A_{21}, \quad Z_{31}^{(1)} = A_{31}, \quad Z_{13}^{(1)} = A_{13},$$

$$Z_{32}^{(2)} = A_{32} - A_{31} A_{11}^{-1} A_{12},$$

$$Z_{23}^{(2)} = A_{23} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{13},$$

$$Z_2 = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12},$$

$$Z_3 = Z_{33}^{(2)} - Z_{32}^{(2)} Z_2^{-1} Z_{23}^{(2)} = A_{33} - A_{31} A_{11}^{-1} A_{13} - (A_{32} - A_{31} A_{11}^{-1} A_{12}) \times$$
$$\times (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} (A_{23} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{13}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kamasova H., Šimek A., Metoda inverze matice rozdelene na bloky, Apl. Matem., 14, No. 2, 105 (1969).
2. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., 1953.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
13/III 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

УДК 535.372

И. СИЛЬДОС, А. ЛЫХМУС, ЛЮБОВЬ РЕБАНЕ

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ ПАРНЫХ ЦЕНТРОВ КИСЛОРОДА В КРИСТАЛЛЕ АРГОНА

I. SILDOS, A. LÕHMUS, LJUBOV REBANE. PAARSETE HAPNIKUMOLEKULIDE LUMINESTSENTS ARGOONI KRISTALLIS

I. SILDOS, A. LÕHMUS, LYUBOV REBANE. LUMINESCENCE SPECTRA OF OXYGEN MOLECULAR PAIRS ON THE ARGON CRYSTALS

1. Введение. Полосы поглощения кислорода в видимой области, вызванные одновременным поглощением одного фотона двумя молекулами кислорода (двойные переходы), наблюдались в газообразном кислороде [1, 2], а также в жидком и твердом кислороде [3–5]. Иссле-