С учетом (6) последнее уравнение можно переписать в виде

$$\det[\hat{A}(XX')\hat{A}' - \lambda NS] = 0,$$

т. е. получим уравнение (1) и, следовательно, величина $N\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i$ асимптотически приближается к χ^2-распределению с $(p-r)(q-r)$ степенями свободы. С учетом (6) и (7) получим, наконец, (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, М., 1971.
2. Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, М., 1963.
3. Neudecker H., Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products, J. Am. Stat. Assoc., **64**, 953 (1969).
4. Golub G. H., Reisch C., Singular value decomposition and least square solutions, Numer. Math., **14**, 403 (1970).
5. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, М., 1968.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
8/II 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.3.15

УДК 519.281

Я. КУКС

ОЦЕНКА СНИЗУ ДЛЯ МИНИМАКСНОГО РИСКА

J. KUKS. MINIMAKSRISKI ALUMINE TÕKE

J. KUKS. A LOWER BOUND FOR THE MINIMAX RISK

Пусть X — n-мерный случайный вектор, распределение которого задается плотностью $p(x\,|\,\theta)$ по σ-конечной мере μ, определенной на борелевской алгебре подмножеств евклидова пространства R^n, а параметр θ принадлежит открытому интервалу (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$.

В некоторых задачах оценивания параметра θ естественным критерием качества статистики $f(X)$ является функционал

$$Q(f) = \sup_{\theta\in(a,b)} E\{[f(X)-\theta]^2\,|\,\theta\} = \sup_{\theta\in(a,b)} \int_{R^n} [f(x)-\theta]^2 p(x\,|\,\theta)\,d\mu(x).$$

В настоящей заметке показывается, как, используя неравенство Рао—Крамера, можно получить оценку снизу для величины $\inf_f Q(f)$, если выполнены следующие условия.

А. Для любой ограниченной статистики $f(X)$ функцию

$$g_f(\theta)=E\{f(X)\,|\,\theta\}=\int_{R^n} f(x)p(x\,|\,\theta)\,d\mu(x)$$

можно дифференцировать по параметру θ под знаком интеграла на интервале (a,b).

Б. Функция

$$I(\theta)=\int_{R^n}[\partial\ln p(x\,|\,\theta)/\partial\theta]^2 p(x\,|\,\theta)\,d\mu(x)$$

определена, непрерывна и положительна на интервале (a,b) и имеет конечные пределы $\lim\limits_{\theta\to a+0} I(\theta)$ и $\lim\limits_{\theta\to b-0} I(\theta)$, которыми доопределим функцию $I(\theta)$ соответственно в точках a и b.

Ввиду конечности интервала $(a,\ b)$ справедливо равенство

$$\inf_f Q(f)=\inf_{f\in F} Q(f),$$

где F — класс ограниченных статистик. Для функций класса F, учитывая условия А и Б, воспользуемся неравенством Рао—Крамера

$$E\{[f(X)-\theta]^2\,|\,\theta\}\geqslant[g_f(\theta)-\theta]^2+[g'_f(\theta)]^2/I(\theta),$$

откуда следует, что

$$\inf_f Q(f)\geqslant\inf_{\varphi\in\Phi}\ \sup_{\theta\in(a,b)}\{\varphi^2(\theta)+[\varphi'(\theta)+1]^2/I(\theta)\},\tag{1}$$

где Φ — класс функций, дифференцируемых на интервале (a,b). Значение выражения в правой части неравенства (1) можно определить, воспользуясь следующей теоремой.

Теорема. *Функционал*

$$Q_1(\varphi)=\sup_{t\in(a,b)}\{\varphi^2(t)+[\varphi'(t)+1]^2/I(t)\},$$

определенный для всех дифференцируемых на интервале (a,b) *функций* $\varphi(t)$, *достигает своего минимального значения* c^2 *на функции* $\varphi_c(t)$, *являющейся единственным решением дифференциального уравнения*

$$\varphi'=\sqrt{I(t)}\sqrt{c^2-\varphi^2}-1,\tag{2}$$

определенным на замкнутом промежутке $[a,b]$ *и удовлетворяющим условию* $\varphi_c(a)=-\varphi_c(b)=c$. *Константа* c, *при которой уравнение* (2) *допускает решение с указанными выше свойствами, единственна.*

Доказательство. На множестве точек (t,φ,d), удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<\varphi<+\infty$ и $-\infty<d<+\infty$, определим функцию $w(t,\varphi,d)$ следующим образом:

$$w(t,\varphi,d)=\begin{cases}\sqrt{I(t)}\sqrt{d^2-\varphi^2}-1, & \text{если } \varphi^2\leqslant d^2,\\ -1, & \text{если } \varphi^2>d^2.\end{cases}$$

Используя теоремы существования, единственности, непрерывности по параметру и сравнения решений дифференциальных уравнений ([1], гл. I и гл. II, § 4; [2], гл. VIII, § 2), можно доказать, что при любом фиксированном значении параметра d уравнение

$$\varphi'=w(t,\varphi,d)$$

допускает единственное решение $\varphi_d(t)$, определенное на промежутке $a \leqslant t \leqslant b$ и удовлетворяющее условию $\varphi_d(a) = d$, причем функция $\xi(d) = \varphi_d(b) + d$ непрерывна и строго возрастающая. Из неравенств $\xi(0) < 0$ и $\xi(b-a) > 0$ следует существование единственного корня уравнения $\xi(d) = 0$, который обозначим через c. Нетрудно проверить, что $\varphi^2_c(t) < c^2$ при $a < t < b$ и, следовательно, $\varphi_c(t)$ является решением уравнения (2), определенным на промежутке $[a, b]$ и удовлетворяющим условию $\varphi_c(a) = -\varphi_c(b) = c$.

Очевидно, $Q_1(\varphi_c) = c^2$. Допустим, что существуют функция $\varphi^*(t)$ и константа c^*, для которых справедливы неравенства

$$\sup_{t\in(a,b)} \{\varphi^{*2}(t) + [\varphi^{*\prime}(t)+1]^2/I(t)\} \leqslant c^{*2} < c^2. \tag{3}$$

Тогда при достаточно малой константе $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$a+\varepsilon < b-\varepsilon, \quad \varphi^*(a+\varepsilon) < \varphi_c(a+\varepsilon) \quad \text{и} \quad \varphi^*(b-\varepsilon) > \varphi_c(b-\varepsilon). \tag{4}$$

Из неравенств (3) и определения функции $\varphi_c(t)$ следует, что на интервале (a, b) выполняются соотношения

$$\varphi^{*\prime}(t) < \sqrt{I(t)}\sqrt{c^2 - \varphi^{*2}(t)} - 1 \quad \text{и} \quad \varphi'_c(t) = \sqrt{I(t)}\sqrt{c^2 - \varphi^2_c(t)} - 1,$$

которые, как легко проверить, противоречат неравенствам (4). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что минимальное значение функционала $Q_1(\varphi)$ равно квадрату корня уравнения $\xi(d) = 0$.

Рассмотрим случай, когда μ—лебеговская мера, $p(x|\theta) = p(x_1 - \theta, \ldots, x_n - \theta)$ и выполнены условия А и Б. Поскольку функция $\sqrt{I(\theta)}$ равна некоторой постоянной α, то минимальное значение функционала $Q_1(\varphi)$ можно легко определить, минуя решение уравнения $\xi(d) = 0$.

Действительно, функция $\varphi_z(t)$, обратная к функции

$$t_z(\varphi) = a + \int_z^{\varphi} (\alpha\sqrt{z^2 - y^2} - 1)^{-1}\, dy, \quad \text{где} \quad 0 < z < \alpha^{-1} \quad \text{и} \quad -z \leqslant \varphi \leqslant z,$$

является решением уравнения

$$\varphi'(t) = \alpha\sqrt{z^2 - \varphi^2(t)} - 1,$$

определенным на промежутке $[a, t_z(-z)]$ и удовлетворяющим условию $\varphi_z(a) = -\varphi_z(t_z(-z)) = z$. Используя ([3], формула 2.5533), получим

$$t_z(-z) - a = \int_z^{-z} (\alpha\sqrt{z^2 - y^2} - 1)^{-1}\, dy = \frac{4\arcsin\sqrt{2^{-1}(1+\alpha z)}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2 z^2}} - \frac{\pi}{\alpha}.$$

Уравнение

$$\frac{4\arcsin\sqrt{2^{-1}(1+\alpha z)}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2 z^2}} - \frac{\pi}{\alpha} = b - a$$

имеет единственный корень $z = c_1$, при этом $0 < c_1 < \alpha^{-1}$. Очевидно, что $t_{c_1}(-c_1) = b$. По доказанной теореме $\min\limits_{\varphi\in\Phi} Q_1(\varphi) = c_1^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1958.
2. Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ч. II, М., 1954.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, М., 1962.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/II 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

УДК 533.6.013.42

Н. ВЕКСЛЕР

О СТРУКТУРЕ ЭХО-СИГНАЛА ОТ «АКУСТИЧЕСКИ ЖЕСТКОЙ» СФЕРЫ В ЖИДКОСТИ

N. VEKSLER. VEDELIKUS OLEVALT JÄIGALT SFÄÄRILT SAABUNUD KAJASIGNAALI STRUKTUURIST

N. VEKSLER. ON THE STRUCTURE OF ECHO-PULSE FROM RIGID SPHERE IN FLUID

Приведем результаты расчета эхо-сигнала, вызванного гармоническим зондирующим импульсом постоянной частоты ω и конечной продолжительности T_0, от «акустически жесткой» неподвижной сферы в безграничной идеальной сжимаемой жидкости. Вычисления проведены по методу, изложенному в [1]. Использованы обозначения, принятые в [1]. Для улучшения сходимости ряда (4.1) было применено нелинейное преобразование частичных сумм ряда. При выбранном значении $\omega \approx 5$ ряд практически сходится при $m = 10$. На рисунке представлены кривые зависимости безразмерного давления в эхо-сигнале $p = 2rp_0^{-1}p_2$ от безразмерного расстояния от фронта дифракционной волны t_1. Кривые вычислены при следующих параметрах: $\omega = 4{,}851$ (при этом значении амплитуда давления стационарного эхо-сигнала p_s в функции от ω достигает абсолютного максимума, равного 1,066); $T_0 = 18{,}13$ (четырнадцать циклов зондирующего импульса), расстояние до точки наблюдения $r = 10^3$. Расчет проводился для трех значений полярного угла точки наблюдения $\theta = 0$; $^1/_4\pi$; $^1/_2\pi$ (на рисунке кривые *а*, *б*, *в* соответственно). При достаточной длительности зондирующего импульса эхо-сигнал в дальнем поле имеет три качественно различные зоны. Начало зондирующего импульса порождает нестационарный компонент эхо-сигнала (показан пунктиром). При малых расстояниях от фронта дифракционной волны $(0 < t_1 \leqslant 4)$ эхо-сигнал состоит из суммы нестационарного и стационарного компонентов. С ростом t_1 нестационарный