чиной (9), где $q=2$, а P и Q определены в (10); следовательно, минимизацию обеих величин можно провести с помощью теоремы из [4]; проделав это, мы получим значения (12) и (13). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 90 (1971).
3. Левин М., Шац Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 460 (1969).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 499 (1970).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
7/II 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.3.14

УДК 519.251.9

Ю. ЯАКСОО

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОЦЕНКИ МАТРИЦЫ

Ü. JAAKSOO. MAATRIKSI HINNANGU APROKSIMEERIMISEST

Ü. JAAKSOO. ON THE APPROXIMATION OF ESTIMATED MATRIX

1. В [1] разработан метод определения линейной модели типа вход—состояние—выход управляемого объекта на основе модели типа вход—выход. Однако применение этого метода при решении прикладных задач встречается с рядом трудностей. Одна из них заключается в том, что часто известной оказывается только оценка (например, оценка максимального правдоподобия) истинной передаточной матрицы, определяющей модель типа вход—выход. Так как ранг передаточной матрицы является существенным параметром, на основе которого определяется, например, размерность пространства состояния системы, то возникают следующие вопросы: как проверить гипотезу о ранге истинной матрицы на основе ее оценки? Как аппроксимировать матрицу оценок матрицей заданного ранга? Какова ошибка аппроксимации?

2. Если $p\times q$ передаточная матрица A оцениваема, то предполагая нормальное распределение помех с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей S, получим следующую оценку максимального правдоподобия матрицы A [2]:

$$\hat{A}=YX'(XX')^{-1},$$

где X — $q\times N$ матрица входов; Y — $p\times N$ матрица выходов; N — число измерений.

Обозначим ранг матрицы A через $R(A)$. Так как вместо истинной матрицы A известна только ее оценка $\hat{A}$, то для проверки гипотезы $R(A)=r$ можно составить следующую процедуру.

Вычисляются корни $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p \geqslant 0$ уравнения

$$\det[\hat{A}XX'\hat{A}' - \lambda NS] = 0. \tag{1}$$

Распределения характеристических корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ чрезвычайно сложны, поэтому особый интерес представляют асимтотические распределения. В [2] показано, что распределение величины

$$\chi_r^2 = N \sum_{i=r+1}^{p} \lambda_i, \quad 0 < r < \min(p, q),$$

при $N \to \infty$ асимптотически стремится к χ^2-распределению с $(p-r)(q-r)$ степенями свободы.

Если χ_r^2 превосходит доверительную границу, то гипотеза, согласно которой

$$R(A) = r,$$

отвергается.

3. Если при проверке гипотезы выясняется, что ранг истинной матрицы равен r, то возникает задача аппроксимации оценки $\hat{A}$ некоторой матрицей $\bar{A}$ заданного ранга r. Для этого, сначала, определим отображение $\mathrm{vec}(\cdot)$ из множества всех действительных матриц в векторное пространство таким образом, что если

$$X = (x_1, \ldots, x_t)$$

— матрица порядка $s \times t$, то

$$(\mathrm{vec}\, X)' = (x_1', \ldots, x_t')$$

является st-мерным вектором.

Можно показать [3], что отображение $\mathrm{vec}(\cdot)$ обладает следующим свойством:

$$(\mathrm{vec}\, X)'(A \otimes B')\, \mathrm{vec}\, X = \mathrm{tr}\, AX'BX, \tag{2}$$

где символ $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц и tr обозначает след квадратной матрицы.

Известно [2], что оценка $\mathrm{vec}\,\hat{A}$ распределена нормально с математическим ожиданием $\mathrm{vec}\, A$ и ковариационной матрицей

$$(XX')^{-1} \otimes S.$$

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Задана матрица $\hat{A}$ порядка $p \times q$. Найти матрицу $\bar{A}$ порядка $p \times q$ данного ранга r такую, что

$$[\mathrm{vec}(\hat{A} - \bar{A})]'[(XX') \otimes S^{-1}][\mathrm{vec}(\hat{A} - \bar{A})] \tag{3}$$

достигает минимума.

Решение этой задачи является основным результатом данной заметки. Ниже покажем, что

$$\inf_{\bar{A}} \{[\mathrm{vec}(\hat{A} - \bar{A})]'[(XX') \otimes S^{-1}][\mathrm{vec}(\hat{A} - \bar{A})]\} = N \sum_{i=r+1}^{p} \lambda_i = \chi_r^2$$

асимптотически приближается к χ^2-распределению с $(p-r)(q-r)$ степенями свободы, причем нижняя граница достигается, если

$$\overline{A}=S^{\frac{1}{2}}P_rP'_rS^{-\frac{1}{2}}\hat{A}, \tag{4}$$

где P_r — матрица порядка $p\times r$, составленная из первых r собственных векторов матрицы

$$\frac{1}{N}S^{-\frac{1}{2}}\hat{A}(XX')\hat{A}'S^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Доказательство основного результата. С помощью формулы (2) и с учетом $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$ выражение (3) можно переписать в виде

$$\operatorname{tr}(XX')(\hat{A}-\overline{A})'S^{-1}(\hat{A}-\overline{A})=$$

$$=N\operatorname{tr}\frac{1}{\sqrt{N}}S^{-\frac{1}{2}}(\hat{A}-\overline{A})(XX')(\hat{A}-\overline{A})'\frac{1}{\sqrt{N}}S^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=N\operatorname{tr}(Q-\overline{Q})(Q-\overline{Q})', \tag{5}$$

где

$$Q=\frac{1}{\sqrt{N}}S^{-\frac{1}{2}}\hat{A}(XX')^{\frac{1}{2}},\qquad \overline{Q}=\frac{1}{\sqrt{N}}S^{-\frac{1}{2}}\overline{A}(XX')^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Известно [4], что любую вещественную матрицу Q порядка $p\times q$ можно разложить в виде (при $p>q$)

$$Q=P\begin{pmatrix}\Lambda\\0\end{pmatrix}R',$$

где

$$P'P=PP'=I_p,\qquad R'R=RR'=I_q,$$

и Λ — диагональная матрица, элементами которой являются неотрицательные квадратные корни от собственных чисел матрицы $Q'Q$; матрицы P и R составлены из ортонормированных собственных векторов матриц QQ' и $Q'Q$ соответственно.

Следуя методике, применяемой для решения аналогичной задачи в случае симметричных матриц [5], можно показать, что на матрице

$$\overline{Q}=P_rP'_rQ, \tag{7}$$

где P_r — матрица порядка $p\times r$, составленная из первых r собственных векторов матрицы QQ', достигается нижняя граница выражения (5), т. е.

$$\inf_{\overline{Q}}[N\operatorname{tr}(Q-\overline{Q})(Q-\overline{Q})']=N\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i,$$

где λ_i — корни уравнения

$$\det[QQ'-\lambda I]=0.$$

С учетом (6) последнее уравнение можно переписать в виде

$$\det[\hat{A}(XX')\hat{A}'-\lambda NS]=0,$$

т. е. получим уравнение (1) и, следовательно, величина $N\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i$ асимптотически приближается к χ^2-распределению с $(p-r)(q-r)$ степенями свободы. С учетом (6) и (7) получим, наконец, (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, М., 1971.
2. Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, М., 1963.
3. Neudecker H., Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products, J. Am. Stat. Assoc., **64**, 953 (1969).
4. Golub G. H., Reisch C., Singular value decomposition and least square solutions, Numer. Math., **14**, 403 (1970).
5. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, М., 1968.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
8/II 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

УДК 519.281

Я. КУКС

ОЦЕНКА СНИЗУ ДЛЯ МИНИМАКСНОГО РИСКА

J. KUKS. MINIMAKSRISKI ALUMINE TOKE

J. KUKS. A LOWER BOUND FOR THE MINIMAX RISK

Пусть X — n-мерный случайный вектор, распределение которого задается плотностью $p(x|\theta)$ по σ-конечной мере μ, определенной на борелевской алгебре подмножеств евклидова пространства R^n, а параметр θ принадлежит открытому интервалу (a,b), $-\infty<a<b<+\infty$.

В некоторых задачах оценивания параметра θ естественным критерием качества статистики $f(X)$ является функционал

$$Q(f)=\sup_{\theta\in(a,b)}E\{[f(X)-\theta]^2|\theta\}=\sup_{\theta\in(a,b)}\int_{R^n}[f(x)-\theta]^2p(x|\theta)\,d\mu(x).$$

В настоящей заметке показывается, как, используя неравенство Рао—Крамера, можно получить оценку снизу для величины $\inf_f Q(f)$, если выполнены следующие условия.