EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.3.13

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

M. LEVIN. KAHEKORDSETE INTEGRAALIDE LIGIKAUDSE ARVUTAMISE VALEMITEST

M. LEVIN. ON THE CALCULUS OF APPROXIMATIONS OF DOUBLE INTEGRALS

Пусть D — правильная область с контуром C, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $W^{(m,m)}L_p$ — класс функций $F(x, y)$, у которых в области D производные $F^{(i+j)}_{x^i y^j}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant m,\ \ i+j < 2m)$ абсолютно-непрерывны и $\iint\limits_D |F^{(2m)}_{x^m y^m}|^p\, dx\, dy \leqslant M^p$. Для функций этого класса рассмотрим вопрос построения формул приближенного интегрирования

$$\iint\limits_D F\, dx\, dy \approx \sum_{k=1}^{N} \lambda_k F(x_k, y_k) + \ldots, \quad (x_k, y_k) \in D \quad (k=1, \ldots, N). \tag{1}$$

Так как для любых функций $\varphi(x)$, $\psi(y)$, имеющих в D абсолютно-непрерывные производные порядка $m-1$, функции

$$x^i \psi(y),\ y^j \varphi(x) \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant m-1) \tag{2}$$

принадлежат классу $W^{(m,m)}L_p$, то с точки зрения построения наилучшей [1] формулы (1) естественно потребовать [2], чтобы формулы (1) были точны для всех функций (2). Но тогда в правой части (1) появятся интегралы по контуру C.

Введем следующие обозначения:

$$S(x, y) = P(x, y) - Q(x, y), \tag{3}$$

где $P(x, y)$ — многочлен степени m по каждой переменной со старшим членом $x^m y^m$, $Q(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k (x-x_k)^{m-1} E(x-x_k)(y-y_k)^{m-1} E(y-y_k)$, $E(u) = 1$ при $u > 0$ и $E(u) = 0$ при $u \leqslant 0$;

$$I^{(j)}_m(S, F) = \int\limits_C S^{(2j)}_{x^j y^j} d_y F^{(2m-2j-2)}_{x^{m-j-1} y^{m-j-1}} + F^{(2m-2j-2)}_{x^{m-j-1} y^{m-j-1}} d_x S^{(2j)}_{x^j y^j}$$

$$(j = 0, \ldots, m-1).$$

По формуле Грина имеем равенство

$$\iint\limits_D U V''_{xy}\, dx\, dy = \int\limits_C U V'_y\, dy + U'_x V\, dx + \iint\limits_D V U''_{xy}\, dx\, dy, \tag{4}$$

применяя которое последовательно $m-2$ раза, получаем

$$\iint\limits_D F^{(2m)}_{x^m y^m} S\, dx\, dy = \sum_{j=0}^{m-3} I^{(j)}_m(S, F) + \iint\limits_D S^{(2m-4)}_{x^{m-2} y^{m-2}} F^{(4)}_{x^2 y^2}\, dx\, dy. \tag{5}$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части (5). По (4) очевидно, что

$$\iint\limits_D P^{(2m-4)}_{x^{m-2}y^{m-2}} F^{(4)}_{x^2y^2}\,dx\,dy = \sum_{j=m-2}^{m-1} I^{(j)}_m (P, F) + (m!)^2 \iint\limits_D F\,dx\,dy. \qquad (6)$$

Пусть теперь $d_k = \{(x, y)\colon (x, y) \in D,\ x \geqslant x_k,\ y \geqslant y_k\}$; $t_k = \{(x_k, y)\colon (x_k, y) \in D,\ y \geqslant y_k\}$; $p_k = \{(x, y_k)\colon (x, y_k) \in D,\ x \geqslant x_k\}$; $l_k = \{(x, y)\colon (x, y) \in C,\ x \geqslant x_k,\ y \geqslant y_k\}$ и c_k — контур области d_k $(k = 1, \ldots, N)$. Учитывая эти обозначения и используя (4), имеем

$$\iint\limits_D (x-x_k)E(x-x_k)(y-y_k)E(y-y_k)F^{(4)}_{x^2y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{d_k} (x-x_k)(y-y_k)F^{(4)}_{x^2y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{c_k} (x-x_k)(y-y_k)F^{(3)}_{xy^2}\,dy +$$

$$+ (y-y_k)F''_{xy}\,dx + \iint\limits_{d_k} F''_{xy}\,dx\,dy = \int\limits_{c_k} (x-x_k)(y-y_k)F^{(3)}_{xy^2}\,dy +$$

$$+ (y-y_k)F''_{xy}\,dx + \int\limits_{c_k} F'_y\,dy = \int\limits_{l_k} (x-x_k)(y-y_k)F^{(3)}_{xy^2}\,dy + (y-y_k)F''_{xy}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{l_k} F'_y\,dy + \int\limits_{t_k} F'_y\,dy = \int\limits_C (x-x_k)(y-y_k)E(x-x_k)E(y-y_k)F^{(3)}_{xy^2}\,dy +$$

$$+ (y-y_k)E(y-y_k)E(x-x_k)F''_{xy}\,dx + \int\limits_C E(x-x_k)E(y-y_k)F'_y\,dy +$$

$$+ F(x_k, y_k) - F(x_k, \overline{y}_k),$$

где $(x_k, \overline{y}_k) \in C$. Поэтому

$$\iint\limits_D (x-x_k)E(x-x_k)(y-y_k)E(y-y_k)F^{(4)}_{x^2y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_C (x-x_k)E(x-x_k)(y-y_k)E(y-y_k)F^{(3)}_{xy^2}\,dy +$$

$$+ (y-y_k)E(y-y_k)E(x-x_k)F''_{xy}\,dx + \int\limits_C E(x-x_k)E(y-y_k)F'_y\,dy +$$

$$+ E(y-y_k)F\,dE(x-x_k) + F(x_k, y_k) \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Умножая последние равенства на $[(m-1)!]^2 A_k$ и складывая их, получаем

$$\iint\limits_D Q^{(2m-4)}_{x^{m-2}y^{m-2}} F^{(4)}_{x^2y^2}\,dx\,dy = \sum_{j=m-2}^{m-1} I^{(j)}_m (Q, F) + [(m-1)!]^2 \sum_{k=1}^{N} A_k F(x_k, y_k). \quad (7)$$

Равенства (5)—(7) и (3) дают нам множество искомых формул

$$\iint\limits_D F\,dx\,dy = \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{N} A_k F(x_k, y_k) - \frac{1}{(m!)^2} \sum_{j=0}^{m-1} I^{(j)}_m (S, F) + R(F), \qquad (8)$$

где

$$R(F) = (m!)^{-2} \iint\limits_D F^{(2m)}_{x^m y^m} S\,dx\,dy.$$

Так как

$$\sup_{F\in W^{(m,m)}L_p} |R(F)| = \frac{M}{(m!)^2}\Big[\iint_D |S|^q\,dx\,dy\Big]^{1/q} \qquad \Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Big), \tag{9}$$

то наилучшую формулу (8), т. е. формулу (8) с наименьшим значением величины (9), определяет та функция (3), которая дает наименьшее значение интегралу $\iint\limits_D |S|^q\,dx\,dy$.

Формула (8) обобщает один из результатов работы [3].

Рассмотрим подробнее один частный случай.

Ниже будем считать, что D — квадрат $0\leqslant x,\ y\leqslant 1,\ p=q=2$,

$$P(x,y)=x^m y^m,$$

$$Q(x,y)=\sum_{i,j=1}^{s,t}\lambda_{ij}(x-x_i)^{m-1}E(x-x_i)\,(y-y_j)^{m-1}E(y-y_j); \tag{10}$$

$W_0^{(m)}L_2$ — класс функций $f(x)$, для которых $f^{(m-1)}(x)$ абсолютно-непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$, $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(m-1)}(0)=0$,

$$\sqrt{\int_0^1 [f^{(m)}(x)]^2\,dx}\leqslant M.$$

Через $A_i^{(l)}$, $x_i^{(l)}$ обозначим веса и узлы наилучшей формулы

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{l}A_k f(x_k)+r_l(f)$$

в классе $W_0^{(m)}L_2$; пусть для этой наилучшей формулы

$$\sup_{f\in W_0^{(m)}L_2}|r_l(f)|=M\delta_{(l)}.$$

Т е о р е м а. *В классе* $W^{(m,m)}L_2$ *наилучшая формула вида*

$$\int_0^1\int_0^1 F\,dx\,dy=\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{s,t}\lambda_{ij}F(x_i,y_j)-\frac{1}{(m!)^2}\sum_{j=0}^{m-1}I_m^{(j)}(S,F)+R(F) \tag{11}$$

имеет веса и узлы

$$\frac{1}{m^2}\lambda_{ij}=A_i^{(s)}A_j^{(t)},\qquad (x_i,y_j)=(1-x_i^{(s)},\ 1-y_j^{(t)}) \tag{12}$$

$$(i=1,\ \ldots,\ s;\ j=1,\ \ldots,\ t)$$

и оценку ошибки

$$\sup_{F\in W^{(m,m)}L_2}|R(F)|=M\sqrt{\frac{1}{(m!)^2(2m+1)}\,(\delta_{(s)}^2+\delta_{(t)}^2)-\delta_{(s)}^2\,\delta_{(t)}^2}\,. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сразу следует из теоремы работы [4]. Действительно, возьмем в [4] $r=2$, $n_1=s$, $n_2=t$, $m_1=m_2=m$, $g_{i,m_i}(x,u)=(x-u)^{m_i-1}E(x-u)/(m_i-1)!$ и в интеграле (7) из [4] сделаем замену $1-u_1=x$, $1-u_2=y$, $i_1=i$, $i_2=j$, $1-x_{1i_1}=x_i$, $1-x_{2i_2}=y_j$, $A_{ij}=m^{-2}\lambda_{ij}$. Тогда величина (7) из [4] совпадает с величиной (9), где $q = 2$, а P и Q определены в (10); следовательно, минимизацию обеих величин можно провести с помощью теоремы из [4]; проделав это, мы получим значения (12) и (13). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 90 (1971).
3. Левин М., Шац Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 460 (1969).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 499 (1970).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 7/II 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

УДК 519.251.9

Ю. ЯАКСОО

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОЦЕНКИ МАТРИЦЫ

Ü. JAAKSOO. MAATRIKSI HINNANGU APROKSIMEERIMISEST

Ü. JAAKSOO. ON THE APPROXIMATION OF ESTIMATED MATRIX

1. В [1] разработан метод определения линейной модели типа вход—состояние—выход управляемого объекта на основе модели типа вход—выход. Однако применение этого метода при решении прикладных задач встречается с рядом трудностей. Одна из них заключается в том, что часто известной оказывается только оценка (например, оценка максимального правдоподобия) истинной передаточной матрицы, определяющей модель типа вход—выход. Так как ранг передаточной матрицы является существенным параметром, на основе которого определяется, например, размерность пространства состояния системы, то возникают следующие вопросы: как проверить гипотезу о ранге истинной матрицы на основе ее оценки? Как аппроксимировать матрицу оценок матрицей заданного ранга? Какова ошибка аппроксимации?

2. Если $p \times q$ передаточная матрица A оцениваема, то предполагая нормальное распределение помех с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей S, получим следующую оценку максимального правдоподобия матрицы A [2]:

$$\hat{A} = YX'(XX')^{-1},$$

где X — $q \times N$ матрица входов; Y — $p \times N$ матрица выходов; N — число измерений.