(кривая *3*). При вычислении эхо-импульса по формулам (9) и (14) приняты значения $\alpha_0 = 1{,}12$; $\alpha_1 = 0{,}01$; $\alpha_2 = 0{,}012$; $\beta_0 = -35{,}0$ и $\beta_1 = 2{,}62$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метсавээр Я., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 415 (1970).
2. Метсавээр Я., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 295 (1971).
3. Метсавээр Я. А., Алгоритм вычисления эхо-сигналов от упругой сферической оболочки в жидкости путем суммирования отдельных групп бегущих волн. Препринт № 3 Ин-та киберн. АН ЭССР, Таллин, 1971.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/XII 1971

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.3.12

УДК 519.217

И. МУЛЛАТ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

I. MULLAT. ÜHEST NEELAVATE MARKOVI AHELATE KLASSIST

I. MULLAT. ON AN ABSORBING CLASS OF MARKOV CHAINS

В настоящей заметке рассматриваются однородные цепи Маркова с конечным числом состояний n и дискретным временем.

Мы ставим своей целью получить соотношения, связывающие элементы фундаментальной матрицы поглощающей цепи (определение см. [1], с. 66), при условии, что некоторые переходы за единицу времени объявляются запрещенными, с соответствующими элементами без данного ограничения. Следует отметить, что подобные соотношения аналогичны разложениям относительно первого и последнего достижения некоторого состояния марковской цепи (см. [2], с. 75), однако, несмотря на их очевидное сходство, до сих пор никем не приводились.

Указанные соотношения, данные без доказательств в форме теорем 1—4, позволяют конкретизировать один общий принцип максимума для некоторых функций, определенных на конечных множествах [3]. В частности, основополагающим моментом конструкции в [3] являются требования, налагаемые на функции в виде приводимых ниже неравенств.

Использование теорем 1—4 явилось основой для созданного в вычислительном центре Таллинского политехнического института эффективного алгоритма решения задачи классификации в распознавании образов. Алгоритм позволил повысить качество и скорость решения задач на ЭВМ по сравнению с употребляемыми в настоящее время алгоритмами.

Обычно однородную цепь можно представить в виде направленного графа, вершинам которого соответствуют состояния цепи, а дугам — возможные за единицу времени переходы из одного состояния в другое. В случае, если вероятность перехода $p_{i,j}$ равна нулю, то дуга $u=(i,j)$ на графе не изображается. И наоборот, какой-либо граф Г можно изобразить в виде некоторой однородной цепи, приписывая дугам числа $p_{i,j}$, удовлетворяющие соотношениям для условных вероятностей. Мы называем такие цепи ассоциированными цепями с графом Г.

Пусть $U(G)$ — множество дуг графа G и $V(G)$ — множество вершин. Образуем граф Г путем добавления к множеству $V(G)$ вершины θ, которая в свою очередь соединена с любой вершиной из $V(G)$ дугой, ведущей в θ.

Рассмотрим следующую ассоциированную с графом Г однородную марковскую цепь:
1) существует единственное поглощающее состояние $\theta \notin V(G)$;
2) вероятность перехода из i в j $(i,j\in V(G))$ $p_{i,j}=p_j$, если дуга $(i,j)\in U(G)$, и $p_{i,j}=0$ в противном случае;
3) вероятность перехода в поглощающее состояние θ из состояния $i\in V(G)$ $p_{i,\theta}=1-\sum\limits_{l=1}^{n} p_{i,l}$.

Легко проверить, что все состояния цепи, отождествленные с вершинами графа G, невозвратные и указанная марковская цепь относится к классу поглощающих цепей (см. [1], с. 55).

Числа p_j мы называем параметрами марковской цепи, ассоциированной с графом Г. Мы полагаем, что $p_j>0$ для любого $j\in V(G)$ и $\sum\limits_{l=1}^{n} p_{i,l}<1$ для всех вершин i графа G. Нетрудно убедиться, что для любого графа G можно узнать такое множество чисел $\{p_j\}$, для которого приведенные ограничения выполнены. Действительно, пусть k — наибольшее число отличных от нуля элементов в строках фундаментальной матрицы, отвечающих вершинам графа G, тогда $0<p_j<1/k$.

Пусть H — произвольное множество дуг графа G, т. е. $H\subset U(G)$. Обозначим через $p(H,\ i,\ j,\ k)$ вероятность перехода системы из состояния i в состояние j за k единиц времени при условии, что за этот период времени исключаются переходы по дугам множества H. Множество H мы называем запрещенным множеством дуг и соответственно дуги, ему принадлежащие, запрещенными.

Положим $p(H,\ i,\ j,\ 0)=\delta_{i,j}$ ($\delta_{i,j}$ — символ Кронекера) и

$$\overline{p}(H,i,j)=\sum_{n=0}^{\infty} p(H,i,j,n). \tag{1}$$

Вследствие существования у марковской цепи, ассоциированной с графом Г, поглощающего состояния все множество $V(G)$ невозвратно (см. [2], с. 45) и ряд (1) сходится.

Мы воспользуемся греческими буквами $\alpha,\ \beta,\ \ldots$ для обозначения запрещенных дуг графа G; α^+ — вершина (состояние), откуда дуга α исходит, α^- — вершина графа, куда α входит.

Теорема 1.

$$\overline{p}(H\cup\alpha,i,j)=\overline{p}(H,i,j)-p_{\alpha^-}\frac{\overline{p}(H,i,\alpha^+)\cdot\overline{p}(H,\alpha^-,j)}{1+p_{\alpha^-}\cdot\overline{p}(H,\alpha^-,\alpha^+)}.$$

Т е о р е м а 2.

$$\overline{p}(H, i, j) = \overline{p}(H \cup \alpha, i, j) + p_{\alpha^-} \frac{\overline{p}(H \cup \alpha, i, \alpha^+) \cdot p(H \cup \alpha, \alpha^-, j)}{1 - p_{\alpha^-} \cdot \overline{p}(H \cup \alpha, \alpha^-, \alpha^+)}.$$

Перейдем к рассмотрению марковских цепей, ассоциированных с неориентированными графами. Пусть все параметры определенной выше марковской цепи равны между собой. Тогда марковская цепь характеризуется одним параметром v, $0 < v < 1/k$.

Сделаем следующее замечание: любое ребро a графа G, принадлежащее множеству всех ребер $E(G)$, можно рассматривать как объединение двух противоположно направленных дуг α и β. В соответствии с этим и множество ребер $H \subset E(G)$ можно считать множеством дуг.

Учитывая это замечание, введем понятие запрещенного ребра, а любое множество ребер будем рассматривать как запрещенное множество дуг.

Для обозначения запрещенных ребер графа воспользуемся латинскими буквами a, b, ... ; a^+ и a^- — вершины, инцидентные ребру a; H — запрещенное множество ребер.

Т е о р е м а 3.

$$\begin{aligned} p(H \cup a, i, j) = \overline{p}(H, i, j) - v\{[\overline{p}(H, i, a^+) \cdot \overline{p}(H, a^-, j) + \overline{p}(H, i, a^-) \cdot \overline{p}(H, a^+, j)] \times \\ \times (1 + v\overline{p}(H, a^+, a^-)) - v[\overline{p}(H, i, a^+)\overline{p}(H, a^+, j)\overline{p}(H, a^-, a^-) + \\ + \overline{p}(H, i, a^-)\overline{p}(H, a^-, j)\overline{p}(H, a^+, a^+)]\} \times \\ \times [(1 + v\overline{p}(H, a^+, a^-))^2 - vp(H, a^+, a^+) \cdot \overline{p}(H, a^-, a^-)]^{-1}. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 4.

$$\begin{aligned} \overline{p}(H, i, j) = \overline{p}(H \cup a, i, j) + v\{[\overline{p}(H \cup a, i, a^+)\overline{p}(H \cup a, a^-, j) + \\ + \overline{p}(H \cup a, i, a^-)\overline{p}(H \cup a, a^+, j)](1 - v\overline{p}(H \cup a, a^+, a^-)) + \\ + [\overline{p}(H \cup a, i, a^+) \cdot p(H \cup a, a^+, j) p(H \cup a, a^-, a^-) + \\ + \overline{p}(H \cup a, i, a^-)\overline{p}(H \cup a, a^-, j)\overline{p}(H \cup a, a^+, a^+)]\} \times \\ \times [(1 - v\overline{p}(H \cup a, a^+, a^-))^2 - v\overline{p}(H \cup a, a^+, a^+)\overline{p}(H \cup a, a^-, a^-)]^{-1}. \end{aligned}$$

С л е д с т в и е. *Непосредственно из вида зависимостей в утверждении теорем 1—4 следуют неравенства, справедливые соответственно для случая ориентированных и неориентированных графов*

(1) $$\overline{p}(H \cup \alpha, i, j) \leqslant \overline{p}(H, i, j) \quad \text{и} \quad \overline{p}(H \cup a, i, j) \leqslant \overline{p}(H, i, j) \qquad (i, j = \overline{1, n}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. К е м е н и Дж. Дж., Конечные цепи Маркова, М., 1970.
2. Д ж у н Кай-Лай, Однородные цепи Маркова, М., 1964.
3. М у л л а т И. Э., Об одном принципе максимума для некоторых функций множеств, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 313, Очерки по обработке информации и функциональному анализу, 1972.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
31/I 1972