EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.3.05

УДК 512.25/.26+519.3 : 330.115

Э. РАЙК

О ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С РЕШАЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ

1. Рассмотрим задачу минимизации по k-мерному вектору x математического ожидания действительной функции $f(x, \xi)$, зависящей от случайного вектора ξ, со значениями из l-мерного пространства S

$$\min_x Ef(x, \xi) \tag{1}$$

при ограничениях

$$Eg_i(x, \xi) \leqslant \gamma_i, \quad i=1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$g_i(x) \leqslant \gamma_i, \quad i=m+1, \ldots, n, \tag{3}$$

где γ_i — заданные числа.

Решения будем искать среди определенного класса функций от s, т. е. будем искать решающую функцию $x(s)$. Поиск решения в виде детерминированной функции вполне оправдан, если все функции $f(x, \cdot)$, $g_i(x, \cdot)$, $g_i(x)$ выпуклы по x. Действительно, в выпуклой задаче, с одной стороны, для любого рандомизированного решения $\tilde{x}(s)$ с математическим ожиданием $\bar{x}(s) = E_x\tilde{x}(s)$ значение минимизирующей функции (1) при функции $\bar{x}(s)$ меньше, чем при $\tilde{x}(s)$, а с другой стороны, если рандомизированное решение $\tilde{x}(s)$ удовлетворяет всем ограничениям (2), (3), то в силу выпуклости функций $g_i(x, \cdot)$, $g_i(x)$ этим ограничениям удовлетворяет и математическое ожидание $\bar{x}(s)$. Для невыпуклой задачи поиск решения в виде детерминированной решающей функции может быть определен технико-вероятностными условиями задачи. В общем случае оптимальную решающую функцию можно рассматривать как приближенное решение задачи (1)—(3). Найти ее, разумеется, легче, чем оптимальное рандомизированное решение.

Отождествим класс решающих функций с некоторым функциональным пространством. Тем самым получим весьма широкий класс решающих функций и сможем пользоваться удобным, хорошо разработанным аппаратом функционального анализа. В частности, существует большой набор методов решения экстремальных задач в функциональных пространствах.

Для задачи (1)—(3) целесообразно предположить, что $x(s) \in L_p(S, \Sigma, \mu)$, где $1 < p < \infty$, а Σ — борелевская σ-алгебра. Этим задача (1)—(3) преобразуется в следующую задачу.

З а д а ч а I

$$\min \int_S f(x(s), s)\, d\mu(s) \tag{4}$$

при ограничениях

$$\int_S g_i(x(s), s)\, d\mu(s) \leqslant \gamma_i, \qquad i=1, \ldots, m, \tag{5}$$

$$g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i \quad \text{для почти всех } s, \quad i = m+1, \ldots, n. \tag{6}$$

В задачах экономического содержания часть условий (6) имеет конкретный вид $x_i \geqslant 0$, $i = m+1, \ldots, m+k$.

Для измеримости подынтегральных функций предположим, что они удовлетворяют условию Каратеодори, т. е. $f(x, s)$ и все $g_i(x, s)$ являются непрерывными по x для почти всех s и измеримыми по s для всех x.

Выведем условия существования решения, используя исследование по интегральным функционалам [1]. Норму в R^h, R^l будем обозначать через $|x|$, а норму в пространствах L_p, C через $\|x\|$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$f(x, s) \geqslant a_0(s) + \beta_0 |x|^p, \tag{7}$$

$$g_i(x, s) \geqslant a_i(s) + \beta_i |x|^p, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $a_i(s) \in L_1(S, \Sigma, \mu)$, β_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — некоторые действительные числа, среди которых хотя бы одно положительно. Пусть функции $g_i(x)$, $i = m+1, \ldots, n$, являются полунепрерывными снизу и квазивыпуклыми.

Тогда решение задачи I существует в пространствах

$$L_p(S, \Sigma, \mu), \quad 1 < p < \infty.$$

Доказательство. Условия (7) (см. теорему 1 [1]) гарантируют слабую полунепрерывность снизу функционалов из (4) и (5). Тем самым ограничения (5) дают в пространстве L_p слабо замкнутые множества.

Ограничения $g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i$, $i = m+1, \ldots, n$, выделяют в k-мерном пространстве замкнутые выпуклые множества. Эти ограничения задают замкнутые и выпуклые множества также в пространстве L_p. В силу рефлексивности пространства L_p эти множества и слабо замкнуты. Пересечение слабо замкнутых множеств также слабо замкнуто.

Допустим для определенности, что $\beta_1 > 0$. По неравенствам (5) и (7) имеем

$$\gamma_1 \geqslant \int g_1(x(s), s)\, d\mu(s) \geqslant \int a_1(s)\, d\mu(s) + \beta_1 \int |x(s)|^p\, d\mu(s) =$$
$$= \int a_1(s)\, d\mu(s) + \beta_1 \|x\|^p,$$

или $\dfrac{\gamma_1}{\beta_1} - \dfrac{1}{\beta_1} \int a_1(s)\, d\mu(s) \geqslant \|x\|^p$.

Множество, заданное этим функционалом, ограничено. Если все β_i, $i = 1, \ldots, m$, неположительны, а $\beta_0 > 0$, то можно формально добавить ограничение

$$\int f(\bar{x}(s), s)\, d\mu(s) \geqslant \int f(x(s), s)\, d\mu(s), \tag{8}$$

где $\bar{x}(s) \in L_p$.

Решения исходной задачи и задачи с дополнительным ограничением (8) совпадают. А поскольку множество, заданное условием (8), ограничено, то, как известно, минимум слабо полунепрерывного снизу функционала на слабо замкнутом ограниченном множестве рефлексивного пространства существует. Теорема доказана.

Замечание. Требование положительности некоторого β_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, можно заменить требованием, чтобы условия $g_i(x) \leqslant \gamma_i$, $i = m+1, \ldots, n$, выделяли в пространстве R^k ограниченное множество.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, s)$ строго выпукла по x для почти всех s, функции $g_i(x, s)$, $i = 1, \ldots, m$, выпуклы по x для почти всех s и функции $g_i(x)$, $i = m+1, \ldots, n$, квазивыпуклы. Тогда если решение задачи I существует, то оно единственно.*

Доказательство. Непосредственно устанавливается строгая выпуклость минимизируемого функционала $\int f(x(s), s) d\mu(s)$ и выпуклость функционалов ограничений $\int g_i(x(s), s) d\mu(s)$, а тем самым и выпуклость множеств $Q_i = \{x(s) : \int g_i(x(s), s) d\mu(s) \leqslant \gamma_i\}$, $i = 1, \ldots, m$. Выпуклыми являются также множества $Q_i = \{x(s) : g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i\}$, $i = m+1, \ldots, n$, и пересечение $Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. Но строго выпуклый функционал на выпуклом множестве может достигать минимума лишь в единственной точке. Теорема доказана.

Приведем необходимые и достаточные условия экстремума для задачи I. Предположим, что функции $f(x, s)$ и $g_i(x, s)$, $i = 1, \ldots, m$, выпуклы по x и $g_i(x)$, $i = m+1, \ldots, n$, выпуклы. Легко сконструировать множества опорных функций для задачи I:

$$M_0 = \{f'_x(x(s), s) \in L_q, \quad f(x, s) - f(x(s), s) \geqslant \geqslant (f'_x(x(s), s), x - x(s)), \ x \in R^k\}, \tag{9}$$

$$M_i = \{g'_{ix}(x(s), s) \in L_q, \ g_i(x, s) - g_i(x(s), s) \geqslant \geqslant (g'_{ix}(x(s), s), x - x(s)), \ x \in R^k\},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Эта запись означает, что опорными функционалами к функционалам из (4) и (5) являются такие функции пространства L_q, при которых для любых фиксированных s векторы $f'_x(x(s), s)$ являются опорными векторами к функциям $f(x, s)$. Множество опорных функций для множества

$$Q_s = \{x(s), \ g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i, \quad i = m+1, \ldots, n\} \tag{11}$$

имеет вид

$$M = \{\chi(s) \in L_q, \ \chi(s) = \sum_{i=m+1}^{n} (\lambda_i(s) g'_{ix}(x(s))),$$
$$\lambda_i(s)(g_i(x(s)) - \gamma_i) = 0, \quad \lambda_i(s) \leqslant 0\}, \tag{12}$$

где $g'_{ix}(x(s))$ — опорные векторы к функциям $g_i(x(s))$ при фиксированных s. Запись (12) имеет место в предположении, что множество

$$Q = \{x, \ g_i(x) \leqslant 0, \quad i = m+1, \ldots, n\} \tag{13}$$

имеет внутреннюю точку. В выражениях (9), (10) и (12) опорные функции являются производными Гато или Фреше, если соответствующие функции и функционалы дифференцируемы по Гато или Фреше. Для интегральных функционалов условия дифференцируемости в пространствах L_p приведены в работе [2].

Выпишем теперь необходимые и достаточные условия экстремума для задачи I в виде уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\bar{f}'_x(x(s),\ s)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g'_i(x(s),\ s)+\sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i(s)g'_{ix}(x(s))=0,$$

$$\lambda_i\int_S g_i(x(s),\ s)\,d\mu(s)=0,\quad i=1,\ \ldots,\ m,$$

$$\lambda_i(s)\,(g_i(x(s))-\gamma_i)=0,\quad i=m+1,\ \ldots,\ n.$$

2. Если в задаче стохастического нелинейного программирования помимо математического ожидания участвуют функции вероятности или квантиля, то искать решающее правило $x(s)$ среди элементов пространства $L_p(S,\Sigma,\mu)$ уже не имеет смысла. Это потому, что свойства функционала вероятности и квантиля в пространствах L_p плохие [3]. Например, функционал $v(x)=P[x(s)\leqslant\gamma]=\int\limits_{x(s)\leqslant\gamma}d\mu(s)$ не является в L_p слабо полунепрерывным ни сверху, ни снизу. Кроме того, множество точек прерывности этого функционала всюду плотно в пространствах L_p, $1\leqslant p<\infty$. Интересно отметить, что множество точек непрерывности функционала $v(x)$ также всюду плотно в пространствах L_p, $1\leqslant p<\infty$.

Потребуем, чтобы решающая функция $x(s)$ принадлежала банахову пространству непрерывных функций $C(S)$, если S ограничено, или метрическому пространству непрерывных функций $C_\rho(S)$, если S — произвольное множество. Метрику в пространстве $C_\rho(S)$ определим формулой

$$\varrho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n},$$
$$\|x-y\|_n=\max_{|s|\leqslant n}|x(s)-y(s)|. \tag{14}$$

Добавим к задаче (1)—(3) вероятностные ограничения

$$P[g_i(x,s)\leqslant\gamma_i]\geqslant\alpha_i,\quad 0<\alpha_i<1,\quad i=n+1,\ \ldots,\ r, \tag{15}$$

и заменим (если потребуется) минимизирующую функцию (1) функцией

$$P[g(x,\ s)\leqslant\gamma]. \tag{15'}$$

Перепишем ограничения (15) в виде интеграла, учитывая одновременно, что ищем решающую функцию $x(s)$

$$\int\limits_{g_i(x(s),s)\leqslant\gamma_i}d\mu(s)\geqslant\alpha_i,\quad 0<\alpha_i<1,\quad i=n+1,\ \ldots,\ r. \tag{16}$$

Для измеримости суперпозиций $g_i(x(s),s)$ потребуем, чтобы функции $g(x,s)$ и $g_i(x,s)$, $i=n+1,\ \ldots,\ r$, были непрерывны по x для почти всех s и измеримы по s для всех x.

Задача II

$$\min\int_S f(x(s),\ s)\,d\mu(s), \tag{17}$$

или

$$\min\int\limits_{g(x(s),s)\leqslant\gamma}d\mu(s) \tag{17'}$$

при ограничениях

$$\int_S g_i(x(s),s)\,d\mu(s)\leqslant\gamma_i,\quad i=1,\ \ldots,\ m, \tag{18}$$

$$g_i(x(s))\leqslant\gamma_i,\quad i=m+1,\ \ldots,\ n, \tag{19}$$

$$\int\limits_{g_i(x(s),s)\leqslant\gamma_i}d\mu(s)\geqslant\alpha_i,\quad 0<\alpha_i<1,\quad i=n+1,\ \ldots,\ r. \tag{20}$$

Неравенства (19) должны удовлетворяться для всех s, если $x(s) \in C(S)$, и лишь для некоторого $s \in S$, если $x(s) \in C_\rho(S)$.

Теорема 3. *Пусть* 1) *функции* $f(x, s)$ *и* $g_i(x, s)$, $i = 1, \ldots, m$, *удовлетворяют неравенствам*

$$f(x, s) \geqslant a_{\lambda_0}(s), \quad g_i(x, s) \geqslant a_{\lambda_i}(s), \tag{21}$$

$|x| \leqslant \lambda_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *для почти всех* $s \in S$, *где* $a_{\lambda_0}(s)$, $a_{\lambda_i}(s) \in L_1$ *для всех* $\lambda_i > 0$; 2) *множество*

$$Q = \{x : g_i(x(s)) \leqslant \gamma_i, \quad i = m+1, \ldots, n\} \tag{22}$$

ограничено; 3) *функции* $g_i(x)$, $i = m+1, \ldots, n$, *полунепрерывны снизу,* 4) *решающие функции* $x(s)$ *удовлетворяют условию*

$$|x(s') - x(s'')| \leqslant K \max(|s' - s''|, |s' - s''|^\beta), \quad k > 0, \quad \beta \geqslant 1. \tag{23}$$

Тогда существует решение задачи II в пространствах $C(S)$ *и* $C_\rho(S)$.

Доказательство. По доказанной в [1] теореме 1 интегральные функционалы (17), (18) полунепрерывны снизу в пространстве $C(S)$. Это доказательство применимо и для пространства $C_\rho(S)$, если заметить, что из сходимости в пространстве $C_\rho(S)$ следует сходимость всюду. Функционалы (17′), (20) полунепрерывны снизу в пространствах $C(S)$ и $C_\rho(S)$ по теореме 3 [3]. Следовательно, множества, задаваемые ограничениями (18) и (20), замкнуты.

В силу полунепрерывности функций $g_i(x)$, $i = m+1, \ldots, n$, множество Q замкнуто в евклидовом пространстве. Но тогда замкнуты и множества, задаваемые ограничениями (19), в пространствах $C(S)$ и $C_\rho(S)$. Условие (23) также выделяет замкнутое множество в $C(S)$ и $C_\rho(S)$. Пересечение замкнутых множеств замкнуто.

Условия 2) и 4) теоремы обеспечивают компактность множеств, удовлетворяющих условиям (19) и (23). В пространстве $C(S)$ это следует из критерия Арцела—Асколли, а в пространстве $C_\rho(S)$ условия (19) и (23) удовлетворяют критерию компактности, приведенному в работе [3]. Утверждение теоремы следует из известного факта, что полунепрерывный снизу функционал достигает минимума на замкнутом компактном множестве. Теорема доказана.

Формула дифференциала вероятностного функционала (17′) в пространстве $C(S)$ выводится точно так же и при тех же допущениях, как и в работе [4] для пространства R^k. Дифференциал в пространстве $C(S)$ выражается интегралом

$$\int\limits_{S_x} \frac{(g'_x(x(s), s), \bar{x}(s))}{|g'_s(x(s), s)|} p(s)\, dS_x(s), \tag{24}$$

где поверхность $S_x = \{s : g(x(s), s) = \gamma\}$; $g'_x(x(s), s)$ — вектор частных производных по x; $g'_s(x(s), s)$ — вектор частных производных по s; $\bar{x}(s)$ — приращение аргумента $x(s)$; $(g'_x(x(s), s), \bar{x}(s))$ — скалярное произведение; $p(s)$ — функция плотности распределения s; $dS_x(s)$ — элемент площади поверхности S_x.

Дифференциал интегрального функционала (17) в пространстве $C(S)$ выражается интегралом

$$\int\limits_{S_x} (f'_x(x(s), s), \bar{x}(s))\, d\mu(s) \tag{25}$$

в предположении, что $f'_x(x, s)$ и $f(x, s)$ непрерывны.

Хотя мы и имеем выражения дифференциалов (24), (25) для функционалов, решить задачу II трудно, так как вероятностные функционалы в пространствах $C(S)$ и $C_\rho(S)$, вообще говоря, неквазивыпуклы. В результате оказывается, что задача II является многоэкстремальной.

Ее можно упростить, если сузить класс решающих функций линейными комбинациями известных функций

$$x(s) = \sum_{i=1}^{N} Y_i x_i(s). \tag{26}$$

Здесь вектор-функции $x_i(s)$ задаются заранее, а неизвестными считаются уже коэффициенты матриц Y_i. Замена (26) является обобщением приема, предложенного в работе [5], где формула (26) имеет вид $x(s) = Ys$, Y — неизвестная матрица. Сузив класс решающих функций заменой (26), получим задачу, качественный анализ которой проведен в работе [4]. Для этой конечномерной задачи уже можно привести достаточные условия квазивыпуклости вероятностной функции $v(x) = P[f(x,s) \leqslant \gamma]$. Именно, если функция $f(x,s)$ представима в виде $f(x,s) = f_1(x)f_2(s) + f_3(s)$, где $f_1(x)$ квазивогнута и $f_2(s)$ неотрицательна (или $f_1(x)$ квазивыпукла и $f_2(s)$ неположительна), то $v(x)$ квазивыпукла.

В заключение автор благодарит И. Петерсена и Т. Тобиаса за высказанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б. Т., Полунепрерывность интегральных функционалов и теоремы существования в задачах на экстремум, Матем. сб., **78** (**120**), 65 (1969).
2. Кардашов В. Р., Условия дифференцируемости интегральных функционалов, Вестн. МГУ, Сер. матем. мех., № 6, 23 (1970).
3. Райк Э. В., О задачах стохастического программирования с функционалами вероятности и квантиля, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, № 2 (1972).
4. Райк Э. В., Качественные исследования в задачах стохастического нелинейного программирования, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 8 (1971).
5. Charnes A., Cooper W. W., Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints, Operat. Res., **11**, No. 1, 18 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
15/III 1972

E. RAIK

STOHHASTILISE PROGRAMMEERIMISE LAHENDUSFUNKTSIOONIGA ÜLESANNETEST

Otsitakse stohhastilise programmeerimise ülesande lahendit deterministliku funktsioonina juhuslikust vektorist, s. o. lahendusfunktsioonina. Esitatakse optimaalse lahendusfunktsiooni olemasolu tingimused ruumides L_p ning C ja analüüsitakse optimaalse lahendi leidmise teid.

E. RAIK

ON THE STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEM WITH SOLUTION FUNCTIONS

The optimal solution function in the stochastic programming problem is found. The conditions for the existence of the optimal solution function in the spaces L_p and C are given.