EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.3.02

УДК 539.3

Ю. ПОДИЛЬЧУК, Х. ВИРКУС

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СФЕРОИДАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ (ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА), ВПАЯННОГО В ТЕРМОУПРУГУЮ СРЕДУ

В работах [1,2] найден коэффициент искажения напряжений для упругого датчика (включения), имеющего форму вытянутого и сжатого эллипсоида вращения. Задача о напряженном состоянии сжатого сфероидального термоупругого включения, впаянного в термоупругую среду, решена в работе [3]. В этих работах рассмотрен случай, когда главные оси поля однородных напряжений на бесконечности совпадают с главными осями сфероида.

В настоящей статье дано точное решение задачи о напряженном состоянии сжатого сфероидального включения, впаянного в термоупругую среду, в предположении, что напряженное состояние на бесконечности, а также температурное поле среды и включения произвольно однородны.

При рассмотрении задачи о сфероидальном включении воспользуемся решением внешней задачи для упругого сфероида. Точное решение внешней и внутренней задач теории упругости для вытянутого сфероида при произвольных на границе перемещениях или усилиях дано в работе [4]. Аналогичный результат можно получить и для сжатого сфероида, если при решении задачи для вытянутого сфероида в соответствующих выражениях заменить q на $i\bar{q}$ и $\bar{q}$ на iq.

§ 1. Внешняя задача для сжатого сфероида

Запишем сфероидальную систему координат

$$x=a\operatorname{ch}\eta\sin\theta\cos\varphi,\quad y=a\operatorname{ch}\eta\sin\theta\sin\varphi,\quad z=a\operatorname{sh}\eta\cos\theta,\qquad(1)$$

где $0\leqslant\eta<\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

Параметр η определяет семейство софокусных сжатых сфероидов.

На поверхности сфероида положим $\eta=\eta_0$ и введем обозначения

$$q=\operatorname{ch}\eta,\quad \bar{q}=\operatorname{sh}\eta,\quad p=\cos\theta,\quad \bar{p}=\sin\theta,\quad q_0=\operatorname{ch}\eta_0,\quad \bar{q}_0=\operatorname{sh}\eta_0.\qquad(2)$$

Направляющие косинусы нормали к поверхности сфероида ($\eta=\eta_0$) определяются по формулам

$$n_x=h\bar{q}_0\bar{p}\cos\varphi,\quad n_y=h\bar{q}_0\bar{p}\sin\varphi,\quad n_z=hq_0p,\qquad(3)$$

где

$$h=(p^2+\bar{q}^2)^{-1/2}.$$

Решение внешней задачи теории упругости для сжатого сфероида получается в виде суммы трех частных линейно-независимых решений уравнений равновесия. В первых двух решениях проекций вектора перемещения на декартовы координаты являются гармоническими функциями

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \frac{a}{2G} P_n^{(m-1)}(p)\, Q_n^{(m-1)}(i\bar{q}) \left[\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} a_{nm} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m-1)\varphi + b_{nm} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (m-1)\varphi \right], \tag{4}$$

$$w = -\frac{a}{2G} \frac{1}{(n+m)(n-m+1)} P_n^{(m)}(p)\, Q_n^{(m)}(i\bar{q})\, (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi);$$

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \frac{a}{2G} \frac{1}{n-m+1} P_n^{(m+1)}(p)\, Q_n^{(m+1)}(i\bar{q}) \left[e_{nm} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m+1)\varphi \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} g_{nm} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (m+1)\varphi \right], \tag{5}$$

$$w = \frac{a}{2G} \frac{(n-m)(n+m+1)}{n-m+1} P_n^{(m)}(p)\, Q_n^{(m)}(i\bar{q})\, (e_{nm} \cos m\varphi + g_{nm} \sin m\varphi).$$

Третье решение строится при помощи функций Папковича—Нейбера [5]

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} [4(1-\nu)\mathbf{B} - \operatorname{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + B_0)],$$

$$B_x = B_y = 0, \tag{6}$$

$$B_z = \frac{a}{n-m+1} P_n^{(m)}(p)\, Q_n^{(m)}(i\bar{q})\, (c_{nm} \cos m\varphi + d_{nm} \sin m\varphi),$$

$$B_0 = -\frac{a^2 i \bar{q}_0^2}{n+m+1} P_{n+1}^{(m)}(p)\, Q_{n+1}^{(m)}(i\bar{q})\, (c_{nm} \cos m\varphi + d_{nm} \sin m\varphi).$$

Здесь

$$Q_n^{(m)}(i\bar{q}) = [(i\bar{q})^2 - 1]^{m/2} d^m Q_n(i\bar{q}) / d(i\bar{q})^m,$$

$$Q_n(i\bar{q}) = P_n(i\bar{q}) \operatorname{arcctg} \operatorname{sh} \eta - i W_{n-1}(i\bar{q}), \tag{7}$$

$$W_{n-1}(i\bar{q}) = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(i\bar{q}) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(i\bar{q}) + $$

$$+ \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5}(i\bar{q}) + \ldots,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, (n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Пусть на поверхности сфероида $(\eta = \eta_0)$ заданы перемещения u, v, w. Разложим их в ряды по сферическим и тригонометрическим функциям вида (3.1, [4]).*

Решение задачи представляется в виде суммы трех частных решений (4)—(6). В случае граничных условий (3.1, [4]) коэффициенты a_{nm}, b_{nm}, e_{nm}, g_{nm}, c_{nm} и d_{nm} находятся из системы уравнений, которая получается из (3.4, [4]), заменой q_0 на $i\bar{q}_0$ и умножением правой части второго уравнения на λ_{m-1} ($\lambda_0 = 2$, $\lambda_{m-1} = 1$ при $m \neq 1$).

* Так будем обозначать формулы, которые приведены в работе [4].

Отдельно рассмотрим случай, когда $m=0$. Тогда решения (4) и (5) линейно зависимы и, следовательно, можно положить $a_{n0} = b_{n0} = 0$. Коэффициенты e_{n0}, g_{n0} и c_{n0} определяются из следующей системы уравнений:

$$Q_n^{(1)}(i\bar{q}_0)e_{n0} + \frac{i\bar{q}_0}{n+1}Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q}_0)c_{n0} = \frac{n+1}{a}G(A_{n1}+D_{n1});$$

$$n(n+1)Q_n(i\bar{q}_0)e_{n0} + [(3-4\nu)Q_n(i\bar{q}_0) + (n+1)i\bar{q}_0 Q_{n+1}(i\bar{q}_0)]c_{n0} = \frac{n+1}{a}2GG_{n0}; \tag{8}$$

$$Q_n^{(1)}(i\bar{q}_0)g_{n0} = \frac{n+1}{a}G(B_{n1}-C_{n1}).$$

Если $n=0$, то $e_{00}=g_{00}=0$, а постоянную c_{00} необходимо определить из второго уравнения системы (8).

Пусть на поверхности сфероида ($\eta=\eta_0$) заданы усилия F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}, которые разложим в ряды вида (3.6, [4]).

В этом случае неизвестные постоянные находятся из системы уравнений, которая получается из (3.7, [4]), заменой q на $i\bar{q}$, q_0 на $i\bar{q}_0$, $\bar{q}_0$ на iq_0 и умножением правой части второго уравнения на λ_{m-1}.

При $m=0$ величины a_{n0} и b_{n0} равны нулю, а e_{n0}, g_{n0} и c_{n0} определяются из следующей системы уравнений:

$$\frac{1}{n+1}dQ_n^{(1)}(i\bar{q})/d\eta e_{n0} + \frac{1}{n+1}\left[\frac{i\bar{q}_0^2}{n+1}\frac{d}{d\eta}\frac{Q_{n+1}^{(1)}(i\bar{q})}{\bar{q}} - 2\nu Q_n(i\bar{q}_0)\right]c_{n0} = \frac{1}{2}(A'_{n1}+D'_{n1});$$

$$nQ_n^{(1)}(i\bar{q}_0)e_{n0} + \left[\left(\frac{1-2\nu}{1+n}+1\right)Q_n^{(1)}(i\bar{q}_0) + niq_0Q_{n+1}(i\bar{q}_0)\right]c_{n0} = G'_{n0}; \tag{9}$$

$$Q_n^{(2)}(i\bar{q}_0)g_{n0} = (n+1)(B'_{n1}-C'_{n1}), \quad \text{где} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

При $n=0$ коэффициенты e_{00} и g_{00} равны нулю, а c_{00} определяется из второго уравнения системы (9).

Следовательно, напряженно-деформированное состояние упругой среды со сжатой сфероидальной полостью определяется перемещениями (4)—(6). При этом коэффициенты a_{nm}, b_{nm}, e_{nm}, g_{nm}, c_{nm} и d_{nm} находятся из соответствующих систем уравнений.

§ 2. Задача о сфероидальном включении

Рассмотрим неограниченную изотропную термоупругую среду с впаянным внутри включением (измерительным устройством), которое имеет форму сжатого сфероида. При этом считаем, что включение является изотропным и упругим, а температурное поле среды и включения однородным.

Обозначим через $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, T, T', G, G', ν, ν', α и α' соответственно векторы перемещений, тензоры напряжений, модули сдвига, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного теплового расширения среды и включения. Предположим, что при значении температуры $\tau = \tau_0$ тепловые напряжения и деформации отсутствуют.

Пусть в среде на достаточном удалении от включения задано произвольное однородное напряженное состояние, которое представим в виде суммы двух напряженных состояний

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = \overset{0}{\tau}_{xy}, \quad \tau_{yz} = \overset{0}{\tau}_{yz}, \quad \tau_{zx} = \overset{0}{\tau}_{zx}; \tag{10}$$

$$\sigma_x = \overset{0}{\sigma}_x, \quad \sigma_y = \overset{0}{\sigma}_y, \quad \sigma_z = \overset{0}{\sigma}_z, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \tag{11}$$

Задачу будем решать отдельно для граничных условий (10) и (11).

1. В случае условий (10) примем, что во включении возникают следующие напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = \tau'_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau'_{yz}, \quad \tau_{zx} = \tau'_{zx}, \tag{12}$$

где τ'_{xy}, τ'_{yz} и τ'_{zx} — некоторые постоянные.

Напряженное состояние среды представим как сумму двух напряженных состояний: однородного напряженного состояния (10) и добавочного, вызванного включением. Добавочное напряженное состояние на бесконечности равно нулю.

Из условий спая среды и включения на поверхности сфероида $(\eta = \eta_0)$ имеем следующие равенства:

$$T' \cdot \mathfrak{n}' = -T \cdot \mathfrak{n}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}, \tag{14}$$

причем векторы $\mathfrak{n}'$ и $\mathfrak{n}$ представляют собой внешнюю и внутреннюю нормали к поверхности сфероида.

Подставляя выражения (10) и (12) в формулу (13), получим, что к поверхности включения при добавочном напряженном состоянии приложены следующие усилия:

$$\begin{aligned} F_{nx} &= (\tau'_{xy} - \tau^0_{xy})\, n_y + (\tau'_{zx} - \tau^0_{zx})\, n_z, \\ F_{ny} &= (\tau'_{xy} - \tau^0_{xy})\, n_x + (\tau'_{yz} - \tau^0_{yz})\, n_z, \\ F_{nz} &= (\tau'_{yz} - \tau^0_{yz})\, n_y + (\tau'_{zx} - \tau^0_{zx})\, n_x. \end{aligned} \tag{15}$$

При добавочном напряженном состоянии выражения для перемещений на поверхности сфероида $(\eta = \eta_0)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} u_g &= \left(\frac{1}{2G'}\tau'_{xy} - \frac{1}{2G}\tau^0_{xy} + A\right) y + \left(\frac{1}{2G'}\tau'_{zx} - \frac{1}{2G}\tau^0_{zx} - D\right) z, \\ v_g &= \left(\frac{1}{2G'}\tau'_{xy} - \frac{1}{2G}\tau^0_{xy} - A\right) x + \left(\frac{1}{2G'}\tau'_{yz} - \frac{1}{2G}\tau^0_{yz} + C\right) z, \\ w_g &= \left(\frac{1}{2G'}\tau'_{yz} - \frac{1}{2G}\tau^0_{yz} - C\right) y + \left(\frac{1}{2G'}\tau'_{zx} - \frac{1}{2G}\tau^0_{zx} + D\right) x, \end{aligned} \tag{16}$$

где постоянные A, C и D характеризуют поворот включения как твердого тела вокруг осей z, x и y.

Для определения добавочного напряженного состояния воспользуемся решением внешней задачи теории упругости для сжатого сфероида. Коэффициенты разложения в рядах (3.1, [4]) и (3.6, [4]) определяются из выражений (15) и (16). Подставляя эти коэффициенты в соответствующие системы уравнений и исключая из них b_{12}, g_{12}, d_{12}, b_{11}, d_{11}, C, a_{11}, c_{11} и D, получаем зависимости между напряжениями

$$\tau'_{xy}[1+\gamma(G/G'-1)]=\tau^0_{xy},$$
$$\begin{matrix}\tau'_{yz}\\ \tau'_{zx}\end{matrix}[1+\varkappa(G/G'-1)]=\begin{matrix}\tau^0_{yz},\\ \tau^0_{zx}\end{matrix} \tag{17}$$

где

$$\gamma=\frac{1}{8(1-\nu)}\{\alpha(\bar{q}_0)[3\bar{q}_0^2-1+8(1-\nu)]+2\bar{q}_0^2+8(1-\nu)\},$$

$$\varkappa=-\frac{1}{2(1-\nu)}[\alpha(\bar{q}_0)(3\bar{q}_0^2+2-\nu)+2\bar{q}_0^2],$$

$$\alpha(\bar{q}_0)=-(\bar{q}_0+\bar{q}_0^3)\operatorname{arcctg}\bar{q}_0+\bar{q}_0^2.$$

Из (17) видно, что касательные напряжения на бесконечности вызывают во включении только касательные напряжения. Более того, каждому из напряжений τ^0_{xy}, τ^0_{yz}, τ^0_{zx} в отдельности соответствует напряжение τ'_{xy}, τ'_{yz}, τ'_{zx}.

2. Рассмотрим граничную задачу (11). Примем, что теперь во включении возникают следующие напряжения:

$$\sigma_x=\sigma'_x,\quad \sigma_y=\sigma'_y,\quad \sigma_z=\sigma'_z,\quad \tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0, \tag{18}$$

где σ'_x, σ'_y и σ'_z — некоторые постоянные.

В данном случае используем такую же схему решения задачи, как при заданных касательных напряжениях. Вектор перемещения находится аналогично, как в работе [3]. Отметим, что однородное температурное поле вызывает нормальные напряжения во включении.

В результате для определения во включении напряжений σ'_x, σ'_y и σ'_z получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\sigma'_x+\sigma'_y}{2}[\beta(G/G'-1)+2\alpha(\bar{q}_0)]-\sigma'_z[\beta(G/G'-1)-2-\alpha(\bar{q}_0)]=$$
$$=(\sigma^0_x+\sigma^0_y+\sigma^0_z)\alpha(\bar{q}_0)+2\sigma^0_z;$$
$$\frac{\sigma'_x+\sigma'_y}{2}\left[\alpha(\bar{q}_0)(G/G'-1)+2G/G'\frac{1-\nu'}{1+\nu'}\right]-\sigma'_z\left[\alpha(\bar{q}_0)(G/G'-1)+\right. \tag{19}$$
$$\left.+2G/G'\frac{\nu'}{1+\nu'}-1\right]=\frac{1-\nu}{1+\nu}(\sigma^0_x+\sigma^0_y+\sigma^0_z)-4G(\alpha'-\alpha)(\tau-\tau_0);$$
$$(\sigma'_x-\sigma'_y)[\gamma(G/G'-1)+1]=\sigma^0_x-\sigma^0_y,$$

где $\beta=\frac{1}{1-\nu}[(1+\nu)\alpha^2(\bar{q}_0)-(3\bar{q}_0^2-1)\alpha(\bar{q}_0)-2\bar{q}_0^2]$.

Отсюда видно, что два первых уравнения системы (19) совпадают с решением (26), полученным в работе [3], если в последнем заменить σ'_x на $1/2(\sigma'_x+\sigma'_y)$ и σ^0_x на $1/2(\sigma^0_x+\sigma^0_y)$. Третье уравнение системы (19) совпадает с первым уравнением (17), если в нем заменить τ'_{xy} на $1/2(\sigma'_x-\sigma'_y)$ и τ^0_{xy} на $1/2(\sigma^0_x-\sigma^0_y)$.

Это совпадение объясняется тем, что напряженное состояние (11) можно представить в качестве суммы симметричного и антисимметричного напряженных состояний.

Суперпозиция решений (17) и (19) дает решение задачи о сфероидальном включении, впаянном в термоупругую среду, для произвольного однородного напряженного состояния на бесконечности.

Если сфероидальным включением является измеритель напряжений, то полученное решение позволяет определить напряжения в среде по показаниям измерительного устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н., Подильчук Ю. Н., Прикладная механика (Киев), **VII**, № 1, 107 (1971).
2. Савин Г. Н., Подильчук Ю. Н., Коэффициент искажения напряжений для датчика в форме сжатого эллипсоида вращения, ДАН УССР, 1972 (в печати).
3. Подильчук Ю. Н., Виркус Х. М., В сб.: Исследования по строительству, **XII**, НИИ строительства Госстроя ЭССР, Таллин, 1971 (в печати).
4. Подильчук Ю. Н., Прикладная механика (Киев), **III**, № 12, 34 (1967).
5. Лурье А. И., Теория упругости, М., 1970.

Институт механики
Академии наук Украинской ССР
Научно-исследовательский институт
строительства Госстроя Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23/XII 1971

J. PODILTŠUK, H. VIRKUS

PINGE- JA DEFORMATSIOONIOLEK TERMOELASTSES KESKKONNAS ASUVAS SFEROIDIKUJULISES VÕÕRKEHAS (MÕÕTESEADMES)

Artiklis leitakse pingeolek sferoidikujulises homogeenses termoelastses võõrkehas, mis asub homogeenses termoelastses keskkonnas. Eeldatakse, et lõpmatuses antud pinge-olek ja põhikeskkonnas ning võõrkehas antud temperatuuriväli on homogeensed.

Pingeoleku saamiseks võõrkehas kasutatakse surutud sferoidi välisülesande lahendit. Ülesannet käsitletakse eraldi juhul, kui lõpmatuses on antud tangensiaalsed, ja juhul, kui lõpmatuses on antud normaalsed pingekomponendid. Tulemuste superpositsioon annab uuritava ülesande täpse lahendi.

Kui võõrkehaks on sferoidikujuline mõõteplaat, võimaldab saadud lahendus mõõteseadme näitude alusel määrata pingeid põhikeskkonnas.

J. PODILCHUK, H. VIRKUS

STATE OF STRESS AND STRAIN IN A SPHEROIDAL INCLUSION (MEASURING SLAB) EMBEDDED IN A THERMOELASTIC MEDIUM

The paper deals with the state of stress in a spheroidal homogeneous thermoelastic inclusion embedded in a homogeneous thermoelastic medium. It is assumed that the given state of stress at infinity and the temperature field in the inclusion and the medium surrounding it are homogeneous.

In order to find the state of stress in the inclusion, a solution of outer problem for an oblate elastic spheroid is used. The problem is handled separately for the cases of tangential and normal stresses at infinity. The superposition of the results obtained gives an exact solution of the problem studied.

If the inclusion is a spheroidal measuring slab, the solution obtained enables the determination of stresses in a medium from the readings of the measuring device.