EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.3.01

УДК 519.43

Я. ХЕННО

ПЛОТНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ МЕНГЕРА

В настоящей статье изучаются плотные вложения систем Менгера. При этом используются методы, сходные с применявшимися в работах [1,2]. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых система Менгера A является плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}(H)$ правым идеалом системы B (следствие 2), и необходимые и достаточные условия, при которых система Менгера имеет плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(H)$ правый идеал (теорема 2), где $\mathfrak{M}(H)$ — класс всех систем Менгера $A=\{A_n,\ n\in I\}$, у которых $I\subseteq H$. Доказано, что все правые (двусторонние) идеалы симметрической системы $\varphi_I(M)$ являются плотно вложенными в классе $\mathfrak{M}(I)$ правыми (соответственно двусторонними) идеалами системы $\varphi_I(M)$ (теоремы 4, 5). Показано, что не существует плотно вложенных подсистем, откуда следует ответ на вопрос Л. Глускина [3] о плотно вложенных подполугруппах.

Все не приведенные здесь определения можно найти в предыдущей работе [4] автора, продолжением которой и является настоящая статья.

I

Пусть $A=\{A_n,\ n\in I\}$ — система Менгера. Назовем функцию x, которая при всяком $n\in I$ отображает A_n^k в A_n, k-местным правым сдвигом системы A, если при всяких $a_1,\ldots,a_m\in A_n$, $b_1,\ldots,b_k\in A_m$, $n,m\in I$,

$$(a_1\ldots a_mb_1)\ldots(a_1\ldots a_mb_k)x=a_1\ldots a_m(b_1\ldots b_kx). \tag{1}$$

Обозначим множество всех k-местных правых сдвигов системы A через $\Psi_k(A)$. При любом $k\geqslant 1$ множество $\Psi_k(A)$ непусто, так как содержит элементы e_i^k, $i=1,\ldots,k$, определенные формулой

$$a_1\ldots a_ke_i^k=a_i \tag{2}$$

при всяких $a_1,\ldots,a_k\in A_n$, $n\in I$.

Пусть $x_1,\ldots,x_l\in\Psi_k(A)$, $y\in\Psi_l(A)$. Определим k-местную функцию $x_1\ldots x_ly:A_n^k\to A_n$, $n\in I$, полагая, что при всяких $a_1,\ldots,a_k\in A_n$, $n\in I$,

$$a_1\ldots a_k(x_1\ldots x_ly)=(a_1\ldots a_kx_1)\ldots(a_1\ldots a_kx_l)y. \tag{3}$$

Так как при произвольных $a_1,\ldots,a_m\in A_n$, $b_1,\ldots,b_k\in A_m$, $n,m\in I$,

$$\begin{aligned}&(a_1\ldots a_mb_1)\ldots(a_1\ldots a_mb_k)\,(x_1\ldots x_ly)=\\&=((a_1\ldots a_mb_1)\ldots(a_1\ldots a_mb_k)x_1)\ldots((a_1\ldots a_mb_k)x_l)y=\\&=(a_1\ldots a_m(b_1\ldots b_kx_1))\ldots(a_1\ldots a_m(b_1\ldots b_kx_l))y=\\&=a_1\ldots a_m((b_1\ldots b_kx_1)\ldots(b_1\ldots b_kx_l)y=\\&=a_1\ldots a_m(b_1\ldots b_k(x_1\ldots x_ly)),\end{aligned}$$

то $x_1 \dots x_l y \in \Psi_k(A)$. При помощи (1) и (3) легко проверить, что если I — произвольное непустое подмножество множества всех натуральных чисел, то в совокупности $\Psi_J(A) = \{\Psi_k(A),\ k \in J\}$ выполняется тождество (1) из [4], т. е. $\Psi_J(A)$ — система Менгера, которую будем называть системой правых сдвигов системы A. Определенные формулой (2) элементы $e_1^k, \dots, e_k^k \in \Psi_k(A)$ являются единицами системы $\Psi_J(A)$.

Пусть $A = \{A_n,\ n \in I\}$ — правый идеал системы $B = \{B_m,\ m \in J\}$. Сопоставим всякому $b \in B_k$, $k \in J$, k-местную функцию $\psi(b): A_n^k \to A_n$, $n \in I$, определенную формулой

$$a_1 \dots a_k \psi(b) = a_1 \dots a_k b. \tag{4}$$

Легко проверить, что $\psi(b)$ — k-местный правый сдвиг системы A. Если $a_1, \dots, a_k \in A_n$, $n \in I$, $b_1, \dots, b_m \in A_k$, $k \in J$, $x \in \Psi_m(A)$, то

$$\begin{aligned} a_1 \dots a_k(\psi(b_1) \dots \psi(b_m)x) &= (a_1 \dots a_k \psi(b_1)) \dots (a_1 \dots a_k \psi(b_m))x = \\ &= (a_1 \dots a_k b_1) \dots (a_1 \dots a_k b_m)x = a_1 \dots a_k(b_1 \dots b_m x) = \\ &= a_1 \dots a_k \psi(b_1 \dots b_m x). \end{aligned}$$

Это значит, что при всяких $b_1, \dots, b_m \in A_k$, $k \in J$, $x \in \Psi_m(A)$

$$\psi(b_1) \dots \psi(b_m)x = \psi(b_1 \dots b_m x). \tag{5}$$

Лемма 1. *Если правый идеал $A = \{A_n,\ n \in I\}$ системы Менгера $B = \{B_m,\ m \in J\}$ является системой без равнодействующих справа элементов, то определенное формулой (4) отображение $\psi: B \to \Psi_J(A)$ является гомоморфизмом, индуцирующим изоморфизм на системе A.*

Доказательство. При всяких $a_1, \dots, a_k \in A_n$, $n \in I$, $b_1, \dots, b_m \in B_k$, $b \in B_m$, $k, m \in J$, имеем $a_1 \dots a_k(\psi(b_1) \dots \psi(b_m)\psi(b)) = (a_1 \dots a_k \psi(b_1)) \dots (a_1 \dots a_k \psi(b_m))\psi(b) = (a_1 \dots a_k b_1) \dots (a_1 \dots a_k b_m) b = a_1 \dots a_k (b_1 \dots b_m b) = a_1 \dots a_k \psi(b_1 \dots b_m b)$, так что $\psi(b_1) \dots \psi(b_m)\psi(b) = \psi(b_1 \dots b_m b)$, т. е. ψ — гомоморфизм. Так как A — система без равнодействующих справа элементов, то для всяких $a, a' \in A_k$, $k \in J$, $a \neq a'$, существуют $a_1, \dots, a_k \in A_n$, $n \in I$, такие, что $a_1 \dots a_k a \neq a_1 \dots a_k a'$, но тогда $a_1 \dots a_k \psi(a) = a_1 \dots a_k a \neq a_1 \dots a_k a' = a_1 \dots a_k \psi(a')$, т. е. $\psi(a) \neq \psi(a')$. Лемма доказана.

Назовем правые сдвиги $\psi(a)$, $a \in A_n$, $n \in I$, системы $A = \{A_n,\ n \in I\}$ внутренними, обозначим совокупность всех k-местных внутренних правых сдвигов системы A через $\psi_k(A)$ и назовем определенный формулой (5) гомоморфизм $\psi: B \to \Psi_J(A)$ каноническим.

Лемма 2. *Если $A = \{A_n,\ n \in I\}$ — система Менгера, I_1, J — такие, что $I_1 \subseteq I \subseteq J$, то система $\psi_{I_1}(A)$ внутренних правых сдвигов системы A является правым идеалом системы $\Psi_J(A)$ правых сдвигов системы A.*

Доказательство. Утверждение следует из (5). Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $A = \{A_n,\ n \in I\}$ — система Менгера без равнодействующих справа элементов, то всякая ненулевая конгруэнция системы $\Psi_J(A)$ правых сдвигов системы A индуцирует ненулевую конгруэнцию на подсистеме $\psi_I(A)$ внутренних правых сдвигов системы A.*

Доказательство. Пусть ϱ — ненулевая конгруэнция системы $\Psi_J(A)$. Тогда существуют $x_1, x_2 \in \Psi_k(A)$, $k \in J$, такие, что $x_1 \neq x_2$, $x_1 \varrho x_2$. Ввиду $x_1 \neq x_2$ существуют $a_1, \dots, a_k \in A_n$, $n \in I$, такие, что $a_1 \dots a_k x_1 \neq a_1 \dots a_k x_2$, откуда согласно лемме 1 следует $\psi(a_1 \dots a_k x_1) \neq \psi(a_1 \dots a_k x_2)$, но по (5) $\psi(a_1 \dots a_k x_i) = \psi(a_1) \dots \psi(a_k) x_i$, $i = 1, 2$, следовательно, $\psi(a_1 \dots a_k x_1) \varrho \psi(a_1 \dots a_k x_2)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $A = \{A_n, n \in I\}$ — система Менгера без равнодействующих справа элементов, $I \subseteq J$. Если $C = \{C_m, m \in J\}$ — система Менгера, содержащая систему $\Psi_J(A)$ правых сдвигов системы A в качестве собственной подсистемы так, что система $\psi_I(A)$ внутренних правых сдвигов является правым идеалом системы C, то существует ненулевая конгруэнция системы C, которая индуцирует на системе $\Psi_J(A)$ нулевую конгруэнцию.*

Доказательство. Определим на C следующее бинарное отношение: для всяких $x, x' \in C_k$, $k \in J$, положим $x\varrho x'$ тогда и только тогда, когда $z_1 \ldots z_k x = z_1 \ldots z_k x'$ при всяких $z_1, \ldots, z_k \in \psi_n(A)$, $n \in I$.

Пусть $x_1, \ldots, x_m, x'_1, \ldots, x'_m \in C_k$, $y, y' \in C_m$, $k, m \in J$, такие, что $x_i \varrho x'_i$, $i = 1, \ldots, m$, $y\varrho y'$. Так как $\psi_I(A)$ — правый идеал системы C, то при всяких $z_1, \ldots, z_k \in \psi_n(A)$, $n \in I$, $x \in C_k$ имеем

$$z_1 \ldots z_k x \in \psi_n(A). \tag{6}$$

Следовательно, $z_1 \ldots z_k(x_1 \ldots x_m y) = (z_1 \ldots z_k x_1) \ldots (z_1 \ldots z_k x_m) y = (z_1 \ldots z_k x'_1) \ldots (z_1 \ldots z_k x'_m) y = (z_1 \ldots z_k x'_1) \ldots (z_1 \ldots z_k x'_m) y' = z_1 \ldots z_k (x'_1 \ldots x'_m y')$, т. е. $x_1 \ldots x_m y \varrho x'_1 \ldots x'_m y'$ и ϱ — конгруэнция системы C. Если $x, x' \in \Psi_k(A)$, $k \in J$, $x_1 \varrho x_2$, то согласно (5) при всяких $a_1, \ldots, a_k \in A_n$, $n \in I$, имеем $\psi(a_1 \ldots a_k x_1) = \psi(a_1) \ldots \psi(a_k) x_1 = \psi(a_1) \ldots \psi(a_k) x_2 = \psi(a_1 \ldots a_k x_2)$, а так как по лемме 1 соответствие $a \to \psi(a)$ взаимно однозначно, то отсюда следует $a_1 \ldots a_k x_1 = a_1 \ldots a_k x_2$, т. е. $x_1 = x_2$. Это значит, что на подсистеме $\Psi_J(A)$ конгруэнция ϱ индуцирует нулевую конгруэнцию. Остается показать, что сама ϱ — ненулевая.

Сопоставим всякому $x \in C_k$, $k \in J$, k-местную функцию $\bar{x}: A_n^k \to A_n$, $n \in I$, определенную следующим образом: для всяких $a_1, \ldots, a_k \in A_n$, $n \in I$, положим $a_1 \ldots a_k \bar{x} = a$ тогда и только тогда, когда $\psi(a_1) \ldots \psi(a_k) x = \psi(a)$. Из (6) следует, что такое $a \in A_n$ всегда существует, и так как по лемме 1 соответствие $a \to \psi(a)$ взаимно однозначное, то a определено однозначно. Из определения $\bar{x}$ следует, что

$$\psi(a_1) \ldots \psi(a_k) x = \psi(a_1 \ldots a_k \bar{x}). \tag{7}$$

Пусть $a_1, \ldots, a_m \in A_n$, $b_1, \ldots, b_k \in A_m$, $n, m \in I$, $x \in C_k$, $k \in J$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\psi(a_1 \ldots a_m b_1) \ldots \psi(a_1 \ldots a_m b_k) x = \\
&= (\psi(a_1) \ldots \psi(a_m) \psi(b_1)) \ldots (\psi(a_1) \ldots \psi(a_m) \psi(b_k)) x = \\
&= \psi(a_1) \ldots \psi(a_m) (\psi(b_1) \ldots \psi(b_k) x) = \psi(a_1) \ldots \psi(a_m) \psi(b_1 \ldots b_k \bar{x}) = \\
&= \psi(a_1 \ldots a_m (b_1 \ldots b_k \bar{x})).
\end{aligned}$$

При помощи (7) отсюда следует $\psi((a_1 \ldots a_m b_1) \ldots (a_1 \ldots a_m b_k) \bar{x}) = \psi(a_1 \ldots a_m (b_1 \ldots b_k \bar{x}))$, и ввиду леммы 1 ясно, что для $\bar{x}$ выполняется (1), т. е. $\bar{x} \in \Psi_k(A)$. Из (5), (7) следует, что при всяких $a_1, \ldots, a_k \in A_n$ имеем $\psi(a_1) \ldots \psi(a_k) x = \psi(a_1 \ldots a_k \bar{x}) = \psi(a_1) \ldots \psi(a_k) \bar{x}$, т. е. $x \varrho \bar{x}$. Так как $\Psi_J(A)$ — собственная подсистема C, то существует $x \in C_k$, $x \notin \Psi_k(A)$, и ввиду $x \varrho \bar{x}$, $\bar{x} \in \Psi_k(A)$ ясно, что конгруэнция ϱ — ненулевая. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если $A = \{A_n, n \in I\}$ — система Менгера без равнодействующих справа элементов, $I \subseteq J$, то система $\psi_I(A)$ внутренних правых сдвигов системы A является в классе $\mathfrak{M}(J)$ плотно вложенным правым идеалом системы $\Psi_J(A)$ правых сдвигов системы A.*

Доказательство. Утверждение следует из лемм 3 и 4. Следствие доказано.

Теорема 1. *Система Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$ является плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}(J)$ правым идеалом системы $B = \{B_m, m \in J\}$ тогда и только тогда, когда канонический гомоморфизм $\psi : B \to \Psi_J(A)$ есть биекция.*

Доказательство. Если $A = \{A_n, n \in I\}$ — плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(J)$ правый идеал системы $B = \{B_m, m \in J\}$, то согласно теореме 3 из [4] A не имеет равнодействующих справа элементов. Поэтому канонический гомоморфизм $\psi : B \to \Psi_J(A)$ индуцирует согласно лемме 1 на системе A изоморфизм. Из условия 1° (см. [4]) плотного вложения следует, что всякий отличный от изоморфизма гомоморфизм системы B индуцирует на системе A отличный от изоморфизма гомоморфизм, следовательно, ψ — изоморфизм. Пусть $\psi(B)$ — образ системы B при изоморфизме ψ. Так как A плотно вложено в B, то изоморфная система $\psi(A)$ будет плотно вложенной в системе $\psi(B)$. Согласно лемме 3 всякая ненулевая конгруэнция системы $\Psi_J(A)$ индуцирует ненулевую конгруэнцию на подсистеме $\psi(A)$. Последняя согласно лемме 2 является правым идеалом системы $\Psi_J(A)$. Поэтому система $\psi(B)$ не может быть собственной подсистемой системы $\Psi_J(B)$, ибо это противоречило бы условию 2° (см. [4]) плотного вложения. Значит, ψ — отображение «на», т. е. биекция.

Обратно, пусть $\psi : B \to \Psi_J(A)$ — биекция. Тогда $\psi(a) \neq \psi(a')$ при всяких $a, a' \in A_k$, $k \in I$, т. е. существуют $a_1, \ldots, a_k \in A_n$, $n \in I$, такие, что $a_1 \ldots a_k a = a_1 \ldots a_k \psi(a) \neq a_1 \ldots a_k \psi(a') = a_1 \ldots a_k a'$. Следовательно, A не имеет равнодействующих справа элементов. Обратное отображение ψ^{-1} является изоморфизмом системы $\Psi_J(A)$ на систему B, причем $\psi(A)$ отображается на A. Согласно следствию 1 система $\psi(A)$ — плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(J)$ правый идеал системы $\Psi_J(A)$, следовательно, изоморфная система A — плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(J)$ правый идеал системы B. Теорема доказана.

Лемма 5. *Если $A = \{A_n, n \in I\}$ — система Менгера, J, H — такие подмножества множества всех натуральных чисел, что $I \subseteq J \subseteq H$ и $J \neq H$, то система A не может быть плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}(H)$ правым идеалом никакой системы $B = \{B_m, m \in J\}$.*

Доказательство. Предположим, что $A = \{A_n, n \in I\}$ — плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(H)$ правый идеал системы $B = \{B_m, m \in J\}$, $J \neq H$. Из определения плотного вложения ясно, что A является плотно вложенным правым идеалом системы B и в классе $\mathfrak{M}(J)$. Согласно предыдущей теореме отсюда следует, что канонический гомоморфизм $\psi : B \to \Psi_J(A)$ — изоморфизм. Так как A — плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(H)$ правый идеал системы B, то изоморфная система $\psi(A)$ будет плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}(H)$ правым идеалом системы $\Psi_J(A)$. Так как J — собственное подмножество множества H, то система $\Psi_J(A)$ будет собственной подсистемой системы $\Psi_H(A)$, причем система $\psi(A)$ является согласно лемме 2 правым идеалом системы $\Psi_H(A)$. Но по лемме 3 всякая ненулевая конгруэнция системы $\Psi_H(A)$ индуцирует ненулевую конгруэнцию на системе $\psi(A)$, что противоречит условию 2° (см. [4]) плотного вложения. Лемма доказана.

Следствие 2. *Система Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$ является плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}(H)$ правым идеалом системы $B = \{B_m, m \in J\}$ тогда и только тогда, когда $J = H$ и канонический гомоморфизм $\psi : B \to$ $\to \Psi_J(A)$ — биекция.*

Доказательство. Утверждение является прямым следствием теоремы 1 и леммы 5. Следствие доказано.

Лемма 6. *Пусть $A = \{A_n, n \in I\}$ — система Менгера, $I_1 \subseteq I$. Система A содержит все единицы $e_1^k, \ldots, e_k^k \in A_k$, $k \in I_1$, тогда и только* *тогда, когда все k-местные правые сдвиги системы A являются при любом $k \in I_1$ внутренними и подмножество $A_1 = \{A_n,\ n \in I_1\}$ системы A не содержит равнодействующих справа элементов.*

Доказательство. Предположим, что в системе A существуют единицы $\overset{k}{e_1}, \ldots, \overset{k}{e_k} \in A_k$, $k \in I_1$. При всяких $a_1, \ldots, a_k \in A_n$, $n \in I$, $x \in \Psi_k(A)$ имеем тогда $a_1 \ldots a_k x = (a_1 \ldots a_k \overset{k}{e_1}) \ldots (a_1 \ldots a_k \overset{k}{e_k}) x = (a_1 \ldots a_k \psi(\overset{k}{e_1})) \ldots (a_1 \ldots a_k \psi(\overset{k}{e_k})) x = a_1 \ldots a_k (\psi(\overset{k}{e_1}) \ldots \psi(\overset{k}{e_k}) x)$, т. е. $x = \psi(\overset{k}{e_1}) \ldots \psi(\overset{k}{e_k}) x$ и по (5) $\psi(\overset{k}{e_1}) \ldots \psi(\overset{k}{e_k}) x = \psi(\overset{k}{e_1} \ldots \overset{k}{e_k} x) \in \psi_k(A)$. Ясно, что A_1 не содержит равнодействующих справа элементов, так как для всяких $a_1, a_2 \in A_k$, $k \in I_1$, $a_1 \neq a_2$, имеем $\overset{k}{e_1} \ldots \overset{k}{e_k} a_1 = a_1 \neq a_2 = \overset{k}{e_1} \ldots \overset{k}{e_k} a_2$.

Обратно, пусть $\psi_{I_1}(A) = \Psi_{I_1}(A)$ и множество A_1 не содержит равнодействующих справа элементов. Это значит, что при любом $k \in I_1$ существуют $\overset{k}{e_1}, \ldots, \overset{k}{e_k} \in A_k$ такие, что для всяких $a_1, \ldots, a_k \in A_n$, $n \in I$, выполняется (2). Тогда для всякого $a \in A_k$, $k \in I_1$, имеем

$$a_1 \ldots a_k a = (a_1 \ldots a_k \overset{k}{e_1}) \ldots (a_1 \ldots a_k \overset{k}{e_k}) a = a_1 \ldots a_k (\overset{k}{e_1} \ldots \overset{k}{e_k} a).$$

Так как A_1 не содержит равнодействующих справа элементов, то отсюда следует $\overset{k}{e_1} \ldots \overset{k}{e_k} a = a$. Последнее вместе с (2) дает, что $\overset{k}{e_1}, \ldots, \overset{k}{e_k}$ — единицы системы A. Лемма доказана.

Теорема 2. *Система Менгера $A = \{A_n,\ n \in I\}$ имеет плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(J)$ $(I \subseteq J)$ правый идеал тогда и только тогда, когда $I = J$ и система A является системой с единицами.*

Доказательство. Если система $A = \{A_n,\ n \in I\}$ имеет плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(J)$ правый идеал, то по теореме 2 из [4] система A является системой с единицами, а по следствию 2 $I = J$.

Обратно, если $I = J$ и система A является системой с единицами, то по лемме 6 $\psi_I(A) = \Psi_I(A)$ и A не имеет равнодействующих справа элементов. Благодаря лемме 1 отсюда следует, что канонический гомоморфизм $\psi : A \to \Psi_I(A) = \psi_I(A)$ — биекция, так что согласно следствию 2 система A является плотно вложенным правым идеалом самой себя. Теорема доказана.

II

Теорема 3. *Пусть $A = \{A_n,\ n \in I\}$ — плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(J)$ правый идеал системы $B = \{B_m,\ m \in J\}$. Если в A при любых $n \in I$, $k \in J$ для всяких $a_1, \ldots, a_k \in A_n$ существуют $x_1, \ldots, x_l \in A_n$, $y_1, \ldots, y_k \in A_l$, $l \in I$, такие, что $a_i = x_1 \ldots x_l y_i$, $i = 1, \ldots, k$, то всякий содержащий A правый идеал системы B будет плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}(J)$ правым идеалом системы B.*

Доказательство. Пусть $D = \{D_n,\ n \in J_1\}$ $(I \subseteq J_1 \subseteq J)$ — такой правый идеал системы B, что $A \subseteq D$. Так как всякая ненулевая конгруэнция системы B индуцирует на A (следовательно и на D) ненулевую конгруэнцию, то условие 1° (см. [4]) плотного вложения для D выполнено.

Предположим, что система Менгера $C = \{C_m,\ m \in J\}$ содержит систему B в качестве собственной подсистемы так, что D — правый идеал системы C. Пусть $a_1, \ldots, a_k \in A_n$, $n \in I$, и $c \in C_k$, $k \in J$. По условиям теоремы существуют $x_1, \ldots, x_l \in A_n$, $y_1, \ldots, y_k \in A_l$, $l \in I$, такие, что $a_i = x_1 \ldots x_l y_i$, $i = 1, \ldots, k$. Так как $A \subseteq D$ и D — правый идеал системы C, то $y_1 \ldots y_k c = z \in D_l$, но так как A — правый идеал системы

B, а следовательно, и системы $D \subseteq B$, то $x_1 \ldots x_l z \in A_n$. Отсюда следует, что $a_1 \ldots a_k c = (x_1 \ldots x_l y_1) \ldots (x_1 \ldots x_l y_k) c = x_1 \ldots x_l (y_1 \ldots y_k c) = x_1 \ldots x_l z \in A_n$, т. е. A — правый идеал системы C. Так как A плотно вложено в B, то существует ненулевая конгруэнция ϱ системы C, которая на A индуцирует нулевую конгруэнцию, но из условия 1° (см. [4]) плотного вложения следует, что ϱ индуцирует нулевую конгруэнцию и на B, а следовательно, и на $D \subseteq B$. Это значит, что D плотно вложено в B. Теорема доказана.

Лемма 7. *Все минимальные правые идеалы симметрической системы Менгера $\varphi_I(M)$ множества M являются плотно вложенными в классе $\mathfrak{M}(I)$ правыми идеалами системы $\varphi_I(M)$.*

Доказательство. Известно [5], что минимальными правыми идеалами системы $\varphi_I(M)$ являются идеалы $\overset{0}{\varphi}_n(M) = \{\varphi_n(\alpha), \alpha \in M\}$, $n \in I$, где n-местные функции $\varphi_n(\alpha)$ определены формулой

$$\bar{\alpha}\varphi_n(\alpha) = \alpha \tag{8}$$

при всяком $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in M^n$.

Из определения ясно, что $x_1 \ldots x_n y = y$ при всяких $x_1, \ldots, x_n$, $y \in \overset{0}{\varphi}_n(M)$. Следовательно, система $\overset{0}{\varphi}_n(M)$ не имеет равнодействующих справа элементов. Пусть $x_1,\ x_2 \in \varphi_k(M)$, $x_1 \neq x_2$. Тогда существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in M$ такие, что $\alpha_1 \ldots \alpha_k x_1 \neq \alpha_1 \ldots \alpha_k x_2$, а следовательно, $\varphi_n(\alpha_1) \ldots \varphi_n(\alpha_k) \psi(x_1) = \varphi_n(\alpha_1) \ldots \varphi_n(\alpha_k) x_1 = \varphi_n(\alpha_1 \ldots \alpha_k x_1) \neq \varphi_n(\alpha_1 \ldots \alpha_k x_2) = \varphi_n(\alpha_1) \ldots \varphi_n(\alpha_k) x_2 = \varphi_n(\alpha_1) \ldots \varphi_n(\alpha_k) \psi(x_2)$ и $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$, т. е. канонический гомоморфизм $\psi : \varphi_I(M) \to \Psi_I(\overset{0}{\varphi}_n(M))$ — изоморфизм.

Всякому $x \in \Psi_k(\overset{0}{\varphi}_n(M))$ при гомоморфизме ψ соответствует некоторое $\varphi = \varphi(x) \in \varphi_k(M)$. Действительно, $\varphi(x)$ можно определить следующим образом: при всяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in M$ положим $\alpha_1 \ldots \alpha_k \varphi(x) = \alpha$ тогда и только тогда, когда $\varphi_n(\alpha_1) \ldots \varphi_n(\alpha_k) x = \varphi_n(\alpha)$. Из определения ясно, что тогда $\psi(\varphi(x)) = x$, т. е. ψ — отображение «на». Этим доказано, что ψ — биекция. Согласно следствию 2 отсюда следует, что $\overset{0}{\varphi}_n(M)$ — плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(I)$ правый идеал системы $\varphi_I(M)$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Все правые идеалы симметрической системы $\varphi_I(M)$ множества M являются плотно вложенными в классе $\mathfrak{M}(I)$ правыми идеалами системы $\varphi_I(M)$.*

Доказательство. Известно [5], что всякий правый идеал $A = \{A_n,\ n \in I_1\}$ симметрической системы $\varphi_I(M)$ $(I_1 \subseteq I)$ содержит минимальные правые идеалы $\overset{0}{\varphi}_n(M)$, $n \in I_1$. Из (8) следует, что для всех $x_1, \ldots, x_n$, $y \in \overset{0}{\varphi}_n(M)$ имеем $x_1 \ldots x_n y = y$, следовательно, идеал $\overset{0}{\varphi}_n(M)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, из которой, а также из леммы 7, следует доказываемое утверждение. Теорема доказана.

Теорема 5. *Все двусторонние идеалы симметрической системы Менгера $\varphi_I(M)$ множества M являются плотно вложенными в классе $\mathfrak{M}(I)$ двусторонними идеалами системы $\varphi_I(M)$.*

Доказательство. Из определения плотного вложения ясно, что если двусторонний идеал A некоторой системы B является плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}$ правым идеалом системы B, то A является также плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}$ двусторонним идеалом системы B. Поэтому утверждение следует из предыдущей теоремы. Теорема доказана.

В частном случае $I = \{1\}$, т. е. для полугрупп, вышеприведенные утверждения известны [1, 2] или легко из них выводимы.

Л. Глускиным поставлен вопрос ([3], с. 6, проблема 25): каковы необходимые и достаточные условия, при которых полугруппа A является плотно вложенной подполугруппой полугруппы B? Ответ на этот вопрос является частным случаем ответа на более общий вопрос о необходимых и достаточных условиях, при которых система Менгера A является плотно вложенной подсистемой системы Менгера B. Ответом на последний вопрос и одновременно на вопрос Л. Глускина будет приведенная ниже теорема 7.

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Теорема 6. *Если $I \neq \{1\}$, то симметрическая система $\varphi_I(M)$ не имеет нетривиальных конгруэнций.*

Доказательство. Пусть ϱ — ненулевая конгруэнция симметрической системы $\varphi_I(M)$, $I \neq \{1\}$. Покажем сначала, что существуют $m \in I$, $m > 1$, и $x_1, x_2 \in \varphi_m(M)$, $x_1 \neq x_2$, такие, что $x_1 \varrho x_2$.

Предположим, что таких элементов x_1, x_2 не существует. Так как конгруэнция ϱ — ненулевая, то $1 \in I$ и существуют $y_1, y_2 \in \varphi_1(M)$, $y_1 \neq y_2$, такие, что $y_1 \varrho y_2$. Ввиду $y_1 \neq y_2$ существует $\alpha \in M$ такое, что $\alpha y_1 \neq \alpha y_2$. Обозначим $\alpha y_1 = \beta_1$, $\alpha y_2 = \beta_2$. Вследствие $I \neq \{1\}$ существует $m \in I$, $m > 1$. Пусть $x \in \varphi_m(M)$ такое, что $\bar{\alpha} x = \alpha$ при всяком $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in M^m$. Обозначим $xy_1 = x_1$, $xy_2 = x_2$, $x_1, x_2 \in \varphi_m(M)$, тогда $x_1 \varrho x_2$ ввиду $y_1 \varrho y_2$, и так как $\bar{\alpha} x_1 = \bar{\alpha}(xy_1) = (\bar{\alpha} x) y_1 = \alpha y_1 = \beta_1$, $\bar{\alpha} x_2 = \bar{\alpha}(xy_2) = (\bar{\alpha} x) y_2 = \alpha y_2 = \beta_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, то $x_1 \neq x_2$.

Это значит, что ϱ индуцирует на системе $\varphi_m(M)$ ненулевую конгруэнцию, но так как при $m > 1$ симметрическая система $\varphi_m(M)$ не имеет нетривиальных конгруэнций [6], то из этого следует, что $x \varrho x'$ при всяких $x, x' \in \varphi_m(M)$.

Пусть $\overset{m}{e_i} \in \varphi_m(M)$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что $\bar{\alpha} \overset{m}{e_i} = \alpha_i$ для всякого $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in M^m$. Тогда для произвольных $x_1, \ldots, x_m \in \varphi_n(M)$, $n \in I$, $\bar{\alpha} \in M^n$, имеем $\bar{\alpha}(x_1 \ldots x_m \overset{m}{e_i}) = (\bar{\alpha} x_1) \ldots (\bar{\alpha} x_m) \overset{m}{e_i} = \bar{\alpha} x_i$, т. е. $x_1 \ldots x_m \overset{m}{e_i} = x_i$, $i = 1, \ldots, m$. По вышедоказанному $\overset{m}{e_i} \varrho \overset{m}{e_j}$ при всяких $1 \leqslant i, j \leqslant m$, следовательно, $x_i \varrho x_j$ для всяких $x_i, x_j \in \varphi_n(M)$, $n \in I$, т. е. ϱ — единичная конгруэнция. Теорема доказана.

Теорема 7. *Никакая система Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$ не может быть плотно вложенной подсистемой системы $B = \{B_m, m \in J\}$ в никаком классе $\mathfrak{M}(H)$.*

Доказательство. Предположим, что система $A = \{A_n, n \in I\}$ является плотно вложенной в классе $\mathfrak{M}(H)$ подсистемой системы $B = \{B_m, m \in J\}$, и покажем, что систему B можно вложить как собственную подсистему в систему $C = \{C_m, m \in J\}$, которая не имеет никаких нетривиальных конгруэнций. Этим теорема будет доказана, ибо существование такой системы C противоречит условию 2° (см. [4]) плотного вложения.

Вложим B сначала как собственную подсистему в систему B^0, которая определяется следующим образом. Пусть O_m — символ, который не содержится в B_m. Обозначим $B_m^0 = B_m \cup \{O_m\}$, $B^0 = \{B_m^0, m \in J\}$ и превратим B^0 в систему Менгера, полагая, что для всяких $x_1, \ldots, x_l \in B_m^0$, $y \in B_l^0$, $m, l \in J$, в случае $x_1, \ldots, x_l \in B_m$, $y \in B_l$, произведение $x_1 \ldots x_l y$ определено так же, как в системе B, в противном случае $x_1 \ldots x_l y = O_m$. Из определения ясно, что B^0 — система Менгера, которая содержит B как собственную подсистему.

Вложим теперь B^0 в систему C, которая не имеет нетривиальных конгруэнций. Если $I = J = \{1\}$, т. е. A, B — полугруппы, то возможность такого вложения доказана в [7]. Предположим, что $J \neq \{1\}$. В [8] доказано, что всякую систему B^0 можно вложить в симметрическую систему $\varphi_J(M)$ некоторого множества M, которая по теореме 6 не имеет нетривиальных конгруэнций, так что в случае $J \neq \{1\}$ можно взять $C = \varphi_J(M)$. Так как B — собственная подсистема B^0 и $B^0 \subseteq C$, то B является собственной подсистемой системы C. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глускин Л. М., Идеалы полугрупп, Матем. сб., **55**, 412 (1961).
2. Глускин Л. М., Идеалы полугрупп преобразований, Матем. сб., **47**, 111 (1959).
3. Свердловская тетрадь (нерешенные задачи теории полугрупп), Свердловск, 1969.
4. Хенно Я., Плотно вложенные правые идеалы систем Менгера, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, 131 (1972).
5. Хенно Я., Эквивалентности Грина в системах Менгера, Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, Тр. по матем. и мех., **IX**, 37 (1970).
6. Nöbauer P., Philipp P., Die Einfachheit der mehrdimensionalen Funktionenalgebren, Arch. Math., **15**, 1 (1964).
7. Шутов Э. Г., Погружения полугрупп в простые и полные полугруппы, Матем. сб., **62**, 496 (1963).
8. Хион Я. В., m-арные Ω-кольцоиды, Сиб. матем. ж., **8**, 174 (1967).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
29/X 1971

J. HENNO

TIHEDATEST SISESTUSTEST MENGERI SÜSTEEMIDES

Töös on leitud tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et Mengeri süsteem A oleks süsteemi B klassis $\mathfrak{M}(H)$ tihedalt sisestatud parempoolne ideaal, ja selleks, et süsteemil A leiduks klassis $\mathfrak{M}(H)$ tihedalt sisestatud parempoolne ideaal. Tõestatakse, et kõik sümmeetrilise süsteemi parem- ja kahepoolsed ideaalid on tihedalt sisestatud, ja näidatakse, et ei eksisteeri tihedalt sisestatud alamsüsteeme.

J. HENNO

DENSE EMBEDDINGS IN MENGER SYSTEMS

A dense embedding theory close to the similar theory for semigroups is constructed for Menger systems. Necessary and sufficient conditions for Menger system A to be densely embedded right ideal in system B are found. Necessary and sufficient conditions for Menger system to have densely embedded right ideal are found, likewise. It is proved that all the right and twoside ideals of symmetric Menger system of all multiplace functions on set M are densely embedded.