EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.3.23

УДК 65.012.122

МАРЕТ ТАММ

О ПОСТБАЛАНСИРОВАНИИ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ ПРИ ПОМОЩИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

MARET TAMM. BILANSIMUDELI JÄRELTASAKAALUSTAMISEST TRANSPORTÜLESANDE ABIL

MARET TAMM. ON POSTBALANCING INPUT-OUTPUT MODELS BY MEANS OF TRANSPORTATION PROBLEMS

В сообщении исследуются возможности решения задачи постбалансирования, которую Э. Линнакс [1] сформулировал для балансовой модели в виде следующей задачи I:

найти неизвестные Δx_{ij}, *при которых*

$$x_{ij}+\Delta x_{ij}\geqslant 0, \qquad i,j=1,\ldots,n; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{ij}=\Delta B_j, \qquad j=1,\ldots,n; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta x_{ij}=\Delta A_i, \qquad i=1,\ldots,n; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}\Delta x_{ij}|\rightarrow \max; \tag{4}$$

причем

$$x_{ij}\geqslant 0, \qquad i,j=1,\ldots,n; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i=\sum_{j=1}^{n}\Delta B_j; \tag{6}$$

$$\Delta A_i\geqslant 0, \qquad i=1,\ldots,s; \tag{7}$$

$$\Delta A_i<0, \qquad i=s+1,\ldots,n. \tag{8}$$

Задача I непосредственно не решается методами линейного программирования, так как в выражении целевой функции (4) встречаются абсолютные значения неизвестных и на основании (8) и (3) некоторые неизвестные Δx_{ij} имеют отрицательные значения.

Преобразуем задачу I в задачу линейного программирования. Прежде всего перейдем к знакопостоянным неизвестным, сделав два дополнительных предположения

$$\Delta x_{ij}\geqslant 0, \qquad i=1,\ldots,s; \qquad j=1,\ldots,n; \tag{9}$$

$$\Delta x_{ij}\leqslant 0, \qquad i=s+1,\ldots,n; \qquad j=1,\ldots,n \tag{10}$$

и замену неизвестных

$$\begin{aligned}\Delta x_{ij}&=u_{ij}, \qquad i=1,\ldots,s; \qquad j=1,\ldots,n;\\ \Delta x_{ij}&=-v_{ij}, \qquad i=s+1,\ldots,n; \qquad j=1,\ldots,n.\end{aligned} \tag{11}$$

На основании (5) и (9) можем опустить часть ограничений (1). Получим задачу II:

найти $u_{ij}\geqslant 0$ *и* $v_{ij}\geqslant 0$, *при которых*

$$x_{ij} - v_{ij} \geqslant 0, \qquad i = s+1, \ldots, n; \qquad j = 1, \ldots, n; \tag{1$^{\mathrm{I}}$}$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_{ij} - \sum_{i=s+1}^{n} v_{ij} = \Delta B_j, \qquad j = 1, \ldots, n; \tag{2$^{\mathrm{I}}$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = \Delta A_i, \qquad i = 1, \ldots, s; \tag{3$^{\mathrm{I}}$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} = -\Delta A_i, \qquad i = s+1, \ldots, n; \tag{3$^{\mathrm{II}}$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{s} |c_{ij}|\, u_{ij} - \sum_{i=s+1}^{n} |c_{ij}|\, v_{ij}\Big) \to \max. \tag{4$^{\mathrm{I}}$}$$

Задача II является задачей линейного программирования. Если $\Delta B_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, то по (7) и (8) она окажется распределительной задачей с верхними границами для некоторой части неизвестных.

Для решения задачи II можем применить такую симплекс-программу, в которой отдельно учитываются ограничения типа (1^{I}), но только при довольно малых значениях параметра n.

Если нам удастся из формулировки задачи II исключить условия (1^{I}), то она превращается в задачу транспортного типа. Сделаем это при помощи замены неизвестных

$$v_{ij} = x_{ij} - y_{ij}, \qquad i = s+1, \ldots, n; \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

В силу такой замены теряется знакопостоянность неизвестных v_{ij}, т. е. действительность предположения (10).

Выражение целевой функции (4) приобретает в силу замены (12) следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{s} |c_{ij}|\, u_{ij} + \sum_{i=s+1}^{n} |c_{ij}|\, y_{ij}\Big) - \sum_{i=s+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|\, x_{ij} \to \max$$

или, исключая последнюю сумму как постоянную,

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{s} |c_{ij}|\, u_{ij} + \sum_{i=s+1}^{n} |c_{ij}|\, y_{ij}\Big) \to \max. \tag{4$^{\mathrm{II}}$}$$

На основании (12) задача II превращается в задачу III: *найти* $u_{ij} \geqslant 0$ *и* $y_{ij} \geqslant 0$, *при которых*

$$\sum_{i=1}^{s} u_{ij} + \sum_{i=s+1}^{n} y_{ij} = \Delta B_j + \sum_{i=s+1}^{n} x_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n; \tag{2$^{\mathrm{II}}$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = \Delta A_i, \qquad i = 1, \ldots, s; \tag{3$^{\mathrm{I}}$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \Delta A_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \qquad i = s+1, \ldots, n; \tag{3$^{\mathrm{III}}$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{s} |c_{ij}|\, u_{ij} + \sum_{i=s+1}^{n} |c_{ij}|\, y_{ij}\Big) \to \max. \tag{4$^{\mathrm{III}}$}$$

Если $\Delta B_j + \sum\limits_{i=s+1}^{n} x_{ij} \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, то задача III окажется транспортной задачей. Действительно, на основании (6)

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta B_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=s+1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i + \sum_{i=s+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Для решения транспортных задач имеется много программ. Например, при помощи программы, составленной М. Рейго [2], можно решить задачи III, в которых $n \leqslant 698$.

Так как ненулевых значений в оптимальном решении транспортной задачи III будет максимально $2n-1$, то в больших задачах, где $2n-1 \ll n^2$, возможны сильные изменения по сравнению с исходными значениями x_{ij}, особенно в строках, где $i = s+1, \ldots, n$.

Устранение последнего обстоятельства методами линейного программирования затруднительно. Можно использовать следующий прием. Изменим в задаче I ограничение (1) введением новых неизвестных $\lambda_{ij} \geqslant 0$. Именно,

$$x_{ij} + \Delta x_{ij} \geqslant \lambda_{ij} x_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{1^{II}}$$

После замены неизвестных (11) и введения дополнительных неизвестных $y_{ij} \geqslant 0$ новые значения структурных неизвестных выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{ij} + u_{ij} &= y_{ij} + \lambda_{ij} x_{ij}, \quad i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, n; \\ x_{ij} - v_{ij} &= y_{ij} + \lambda_{ij} x_{ij}, \quad i = s+1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Получим задачу IV:

найти $y_{ij} \geqslant 0$ *и* $\lambda_{ij} \geqslant 0$, *из которых по возможности многие* $\lambda_{ij} > 0$ *и при которых*

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_{ij} = \Delta B_j + \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{2^{III}}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} \Delta B_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \tag{2^{IV}}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} y_{ij} = \Delta A_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{3^{IV}}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} y_{n+1,j} = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}; \tag{3^{V}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|\, y_{ij} + c \sum_{i=1}^{n} y_{i,n+1} + c \sum_{j=1}^{n} y_{n+1,j} \to \max, \tag{4^{IV}}$$

где

$$\begin{aligned} y_{n+1,j} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n; \\ y_{i,n+1} &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n; \end{aligned} \tag{13}$$

и c — некоторая постоянная, например, $c = \frac{1}{2} \max_{i,j} |c_{ij}|$.

Первая часть задачи IV является транспортной задачей относительно неизвестных y_{ij}. Вторая часть задачи IV — нахождение $\lambda_{ij} \geqslant 0$ из системы уравнений (13) по найденным в первой части $y_{n+1,j}$, $j = 1, \ldots, n$, и $y_{i,n+1}$, $i = 1, \ldots, n$ — требует таких решений для системы распределительного типа, в которых по возможности многие компоненты $\lambda_{ij} > 0$.

Изложенный подход оставляет открытыми принцип выбора конкретного решения системы (13) и влияние выбора постоянной c в (4^{IV}) на результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Linnaks E., Bilansiteooria, TPI väljaanne, Tallinn, 1971.
2. Рейго М., В сб.: Программы для ЭЦВМ «Минск-22», вып. 8, Таллин, 1969.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
2/III 1971