EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.3.19

УДК 519.217

Т. ТОБИАС

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВРЕМЕНИ

T. TOBIAS. DIFUSIOONIPROTSESSI OPTIMAALSEST PEATAMISEST LÕPLIKUS AJAVAHEMIKUS

T. TOBIAS. OPTIMAL STOPPING RULES FOR DIFFUSION PROCESS ON THE FINITE TIME INTERVAL

В данной заметке обобщаются результаты работы [1] на диффузионные процессы.

1. Пусть x_t — одномерный диффузионный процесс на конечном отрезке $t \in [t_0, T]$:

$$dx(t) = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dw(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где коэффициенты a и b удовлетворяют по x и t условию Липшица в каждой ограниченной области B.

В каждый момент времени t можно остановить процесс, при этом получается выигрыш $g(x_t, t)$. Среди всевозможных марковских моментов $\tau \leqslant T$ требуется найти τ' такой, что

$$U(x_0, t_0) = \sup_{\tau} M_{x_0, t_0} g(x_\tau, \tau) = M_{x_0, t_0} g(x_{\tau'}, \tau').$$

Пусть $(x_0, t_0) \in B = \{(x, t) : \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t);\ t_0 < t < T\}$, где $\sigma_i(t)$ — непрерывные функции. Пусть τ_B — момент первого выхода процесса x_t из области B. Если $g(x, t)$ — непрерывная функция, то τ' является моментом вида τ_B и [2]

$$U(x_0, t_0) = \sup_{\tau_B} M_{x_0, t_0} g(x_{\tau_B}, \tau_B) = M_{x_0, t_0} g(x_{\tau_{B'}}, \tau_{B'}).$$

Пусть $L = \partial/\partial t + a\,\partial/\partial x + \frac{b^2}{2}\partial^2/\partial x^2$ — производящий дифференциальный оператор процесса x_t. Рассмотрим функцию $h(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям: а) h — непрерывная функция в области $\bar{B}$; б) h_t, h_x, h_{xx} — непрерывные функции в B; в) Lh ограничена в B. Тогда известно [3], что при $(x, t) \in B$

$$M_{x,t} h(x_{\tau_B}, \tau_B) - h(x, t) = M_{x,t} \int_t^{\tau_B} Lh(x_s, s)\,ds. \tag{2}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = 0, \quad (x, t) \in B, \tag{3}$$

$$u|_\Sigma = g, \tag{4}$$

где $\sum = \{(x, t) : x = \sigma_i(t),\ t_0 < t < T\} \cup \{(x, T) : \sigma_1(T) \leqslant x \leqslant \sigma_2(T)\}$.

Принимая в (2) $h(x, t) = u(x, t)$, получим, что $u(x, t) = M_{x,t} g(x_{\tau_B}, \tau_B)$.

Допустим, что границы $\sigma_i(t)$ оптимальной области остановки B' обладают свойством строгой сферичности извне. Тогда [4] для этой области существует решение краевой задачи (3) — (4), и задача об оптимальной остановке процесса x_t заменяется следующей эквивалентной задачей: требуется найти область B' такую, что

$$U(x_0, t_0) = \sup_B u(x_0, t_0; B) = u(x_0, t_0; B').$$

2. В этом пункте выведем интегральное представление для решения $u(x, t)$ уравнения $Lu + f = 0$ при краевых условиях (4) и найдем необходимые условия, которым удовлетворяет экстремальная область B'.

Допустим, что а) a_{xx}, b_x, g_x, g_t — непрерывные в $\bar{B}$ функции; б) $f(x,t)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая по x в каждой ограниченной области условию Гёльдера с постоянной, не зависящей от t; в) $\sigma_i(t)$ — непрерывные и кусочно-непрерывно дифференцируемые функции, обладающие свойством строгой сферичности извне. Введем сопряженный оператор

$$L^*v = av_{xx} + (2a_x - b)v_x + (a_{xx} - b_x)v - v_t.$$

Интегрируя тождество Грина, получим

$$\iint_B (uL^*v - vLu)\,d\xi\,d\tau = \iint_B [(auv_x + a_x uv - au_x v - buv)_x - (uv)_t]\,d\xi\,d\tau. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е. Так как L является оператором с обратным направлением времени, то в данном случае тождество Грина несколько отличается от обычной записи.

Пусть $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения (3) (или функция Грина уравнения (3) в произвольной области $C \supset B$). Принимая $v = \Gamma$ и используя в (5) формулу Грина и свойства функции Γ, имеем

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \int_t^T \{a(\sigma_i(\tau),\tau)\,u(\sigma_i(\tau),\tau)\,\Gamma_\xi[x, t; \sigma_i(\tau), \tau] + a_x u\Gamma - au_x\Gamma - bu\Gamma + \Gamma u\sigma_i'\}\,d\tau + \int_{\sigma_1(T)}^{\sigma_2(T)} (\Gamma u)_{\tau=T}\,d\xi + \iint_B \Gamma f\,d\xi\,d\tau. \quad (6)$$

Варьируя функции $\sigma_i(t)$, получим следующие необходимые условия для экстремума $u(x,t)$ в точке (x,t):

$$a_x(\sigma_i(\tau),\tau)\,\Gamma(x, t; \sigma_i(\tau),\tau)\,[u_x(\sigma_i(\tau),\tau) - g_x(\sigma_i(\tau),\tau)] + a\Gamma_\xi(u_x - g_x) + b\Gamma(g_x - u_x) + \Gamma(g_\tau - u_\tau) = 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant T.$$

Ввиду вышеуказанной произвольности выбора функции Γ отсюда легко заключить, что

$$u_x(\sigma_i(t), t) = g_x(\sigma_i(t), t); \qquad u_t(\sigma_i(t), t) = g_t(\sigma_i(t), t) \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \quad (7)$$

Ввиду произвольности (x, t) отсюда вытекает также принцип оптимальности Беллмана: оптимальная для точки (x_0, t_0) область B' является оптимальной и для всех точек $(x, t) \in B'$.

3. Допустим, что $Lg = f$ существует и $f(x,t)$ удовлетворяет условию (б) п. 2. Тогда заменой $u_0(x,t) = u(x,t) - g(x,t)$ можно задачу (3) — (4) привести к виду

$$Lu_0 + f = 0, \quad (x, t) \in B, \tag{8}$$

$$u_0\big|_{x=\sigma_i(t)} = 0, \quad u_0\big|_{t=T} = 0. \tag{9}$$

Задача заключается в нахождении неизвестных границ $\sigma_i(t)$, вдоль которых $u_{0x}\big|_{x=\sigma_i(t)} = 0$.

Воспользуемся представлением (6), которое содержит значения $u(x, t)$ и $u_x(x, t)$ на границах $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$. Из этих шести величин нужно задать четыре (при этом на любой $\sigma_i(t)$ или u, или u_x). Остальные две функции можно найти из соотношения (6). При константных коэффициентах a и b это доказано в работе [1], в данном случае рассуждения сходны.

Принимая в (6) $u(\sigma_i(t), t) = u_x(\sigma_i(t), t) = 0$ и устремляя $x \to \sigma_i(t)$, получим следующие функциональные уравнения для определения неизвестных границ $\sigma_i(t)$:

$$\int_t^T \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} \Gamma[\sigma_i(t), t;\ \xi, \tau] f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = 0, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Значения $\sigma_i(T)$ являются решениями уравнения $f[\sigma_i(T), T] = 0$ (см. [1]). При приближенных вычислениях можно $\sigma_i(t)$ заменить ломаной, значения которой вычисляются поочередно в точках $T - \Delta$, $T - 2\Delta$ и т. д.

Итак, если в исходной задаче границы $\sigma_i(t)$ удовлетворяют условию (в) п. 2, то они удовлетворяют уравнениям (10).

Если $f(x, t) > 0$ ($f(x, t) < 0$) на всей полосе $\{(x, t): -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$, то в (10) решение не существует и вся полоса является областью продолжения (областью остановки). Линии, вдоль которых $f(x, t) = 0$, являются оценками изнутри для границ $\sigma_i(t)$.

Отметим еще, что мы ограничились одномерным случаем лишь для удобства. Все сказанное обобщается на случай, когда $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тобнас Т., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 121 (1971).
2. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1969.
3. Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963.
4. Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, М., 1968.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/I 1971