EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.3.14

УДК 519.95

В. АЛАДЬЕВ

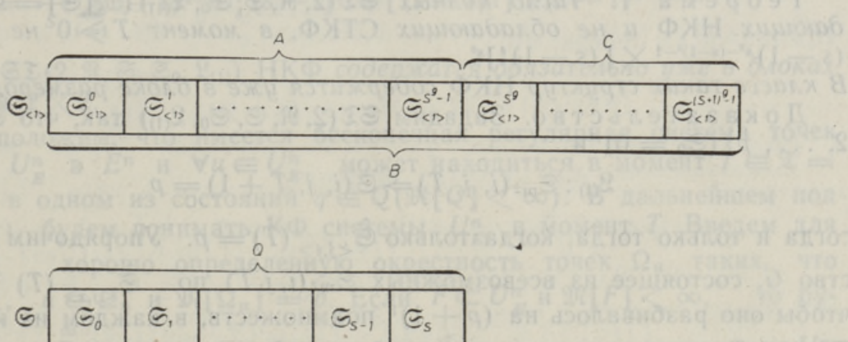
НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СТРУКТУР НЕЙМАНА—МУРА

В настоящем сообщении приводятся некоторые оценки для числа структур Неймана—Мура определенного типа, дается критерий неконструируемости конфигураций в таких структурах и рассматриваются некоторые другие смежные вопросы. Все понятия и обозначения соответствуют работам [1–7].

Королларий 1. *Если среди структур* $\mathfrak{S}\mathfrak{T}(2, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ $(\overline{\mathfrak{M}}[\mathfrak{S}] = s)$ G *структур обладают* СКФ, *то число структур* $\mathfrak{S}\mathfrak{T}(2, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}^*, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ $(s^* \geqslant s)$, *обладающих* СКФ, *не меньше величины* ☆

$$G \prod_i (s+i)^* \left(\sum_{j=0}^{8} C_9^j (s+i)^* j \right).$$

Доказательство. Пусть среди структур $\mathfrak{S}\mathfrak{T}(2, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ при $\mathfrak{M}[\mathfrak{S}] = s$ имеется G структур, обладающих СКФ. Для удобства дальнейших рассуждений рассмотрим приведенные на рисунке множества $\mathfrak{S}_{<1>}$ и $\mathfrak{S}$.



Множества $\mathfrak{S}_{<1>}: \{\mathfrak{S}^0_{<1>}, \ldots, \mathfrak{S}^{(s+i)^9-1}_{<1>}\}$ $(\mathfrak{M}[\mathfrak{S}_{<1>}] = (s+i);\ i = 0, 1, \ldots)$ и $\mathfrak{S}: \{\mathfrak{S}_0, \ldots, \mathfrak{S}_{s-j-1}\}$ $(\mathfrak{M}[\mathfrak{S}] = s-1-j;\ j = 0, 1, \ldots)$ некоторым образом упорядочены. Как следует из определения функции перехода $\mathfrak{L}_{(1)}$ [3], $\mathfrak{L}_{(1)}: \mathfrak{S}_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}$, причем $\mathfrak{S}^0_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}_0$. Будем говорить, что отображение $\mathfrak{L}_{(1)}: \mathfrak{S}_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}$ $[\mathfrak{S}^0_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}_0]$ обладает СКФ, если $\mathfrak{S}\mathfrak{T}(2, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ обладает СКФ. Тогда, по предположению, из различных отображений $\mathfrak{L}_{(1)}: \mathfrak{S}_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}$ $[\mathfrak{S}^0_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}_0]$ только G отображений обладают СКФ (под

☆ Где $a * b$ есть a^b и $i = \overline{1, s^* - s}$.

СКФ можно понимать только нетривиальные, т. е. содержащие универсальную машину Тьюринга—Поста, СКФ), причем СКФ могут иметь автоматы только в состояниях $\mathfrak{S}_i (i = \overline{1, s-1})$. Расширим теперь множество допустимых состояний $\mathfrak{S} = P(\mathfrak{M}[\mathfrak{S}] = s)$ до $\mathfrak{S}^1 = Q(\mathfrak{M}[\mathfrak{S}^1] = s+1)$. Тогда множество $\mathfrak{S}_{<1>} = A$, очевидно, расширится до множества $\mathfrak{S}'_{<1>} = B(\mathfrak{M}[\mathfrak{S}'_{<1>}] = s^{(s+1)^3})$ (см. рисунок). Рассмотрим теперь отображение $\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}'^{*}_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}^{1*}[\mathfrak{S}^0_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}_0]$, складывающееся из отображения $\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}[\mathfrak{S}^0_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}_0]$, содержащего СКФ, и $\mathfrak{L}_{(1)} : (\mathfrak{S}'_{<1>} - \mathfrak{S}_{<1>}) \Rightarrow \mathfrak{S}^1$. Нетрудно показать, что каждое из отображений $\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}'^{*}_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}^{1*}[\mathfrak{S}^0_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}_0]$ обладает по крайней мере теми же СКФ, что и отображение $\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}$. Число же различных отображений вида $\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}'^{*}_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}^{1*}[\mathfrak{S}^0_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}_0]$ равно, как нетрудно показать, $G \cdot \mathfrak{M}[\mathfrak{S}^1] * (\mathfrak{M}[\mathfrak{S}^1] - \mathfrak{M}[\mathfrak{S}])$. Следовательно, число G^1 структур $\mathfrak{ST}(2, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ с $\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}'_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}^1[\mathfrak{S}^0_{<1>} \Rightarrow \mathfrak{S}_0]$ удовлетворяет неравенству

$$G^1 \geqslant G \cdot \mathfrak{M}[\mathfrak{S}^1]^* (\mathfrak{M}[\mathfrak{S}^1] - \mathfrak{M}[\mathfrak{S}]). \qquad (1)$$

Расширяя множество $\mathfrak{S}^1$, методом индукции с использованием вышеприведенных рассуждений получаем, что число структур $\mathfrak{ST}(2, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}^i, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$, обладающих СКФ, удовлетворяет неравенствам

$$G^i \geqslant G^{i-1} \cdot \mathfrak{M}[\mathfrak{S}^i]^* (\mathfrak{M}[\mathfrak{S}^i] - \mathfrak{M}[\mathfrak{S}^{i-1}]) \qquad (i = \overline{1, s^i - s}). \qquad (2)$$

Используя теперь несложные преобразования, из (1) и (2) получаем доказательство нашего короллария.

Распространение результата на случай $\mathfrak{ST}(N, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(n)})$ не вызывает затруднений.

Теорема 1. *Число полных* $\mathfrak{ST}(2, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)}) (\mathfrak{M}[\mathfrak{S}] = s)$, *обладающих* НКФ *и не обладающих* СТКФ, *в момент* $T > 0$ *не меньше* $(s-1)^{s^8 - (s-1)^8 - 1} \times [(s-1)!]^{s^8}$.
В классе таких структур НКФ *содержится уже в блоке размером* 2×2.

Доказательство. Зададим $\mathfrak{ST}(2, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ так, что $\mathfrak{S} : \{0, 1, 2, \ldots, p\} (\mathfrak{S}_0 = 0)$ и

$$\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T) \Rightarrow \mathfrak{S}(i, j, T+1) = p \qquad (3)$$

тогда и только тогда, когда только $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T) = p$. Упорядочим множество G, состоящее из всевозможных $\mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$ по $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T)$ так, чтобы оно разбивалось на $(p+1)^8$ подмножеств, в каждом из которых $\mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$ отличается только $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T)$. Можно показать, что G разбивается на два подмножества G' и G'' ($G' \cap G'' = \varnothing$; $G' \cup G'' = G$) таких, что для $\forall \mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T) \in G'$ только $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T)$ может быть равно p, а для $\forall \mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T) \in G''$ $p \in \mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$, не считая $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T)$. Нетрудно подсчитать, что $\mathfrak{M}[G'] = (p+1)p^8$, а $\mathfrak{M}[G''] = (p+1) \cdot [(p+1)^8 - p^8]$. Из упорядочения G следует, что G' и G'' разбиты на подмножества G'^{*} и G''^{*} такие, что в них $\mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$ отличаются только $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T)$. Тогда число G'^{*} равно p^8, а число G''^{*} равно $(p+1)^8 - p^8$. Из (3) и теоремы [2] вытекает, что $\mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$, у которой $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T) = p$ и $p \in \mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$, не считая $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T)$, является НКФ.

Из доказательства же теоремы [2] следует, что для отсутствия в $\mathfrak{ST}(2, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ СТКФ достаточно, чтобы $\mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$, отличающиеся только $\hat{\mathfrak{S}}_{<j,i>}(T)$, переводились функцией $\mathfrak{L}_{(1)}$ в различные $\mathfrak{S}(i, j, T+1)$. Используя теперь это обстоятельство и свойство $\mathfrak{L}_{(1)}$ (3), можно показать, что число различных отображений $\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T) \in G'^* \Rightarrow \mathfrak{S}(i, j, T+1)$ для каждого G'^* (за исключением G'^*, содержащего $\overset{0}{\mathfrak{S}}_{m^2}(i, j, T)$) равно $p!$ (в G'^*, содержащем $\overset{0}{\mathfrak{S}}_{m^2}(i, j, T)$, это число равно $(p-1)!$). Для G''^* дело обстоит несколько иначе, так как каждое G''^* имеет $p+1$ $\mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$, которые должны быть отображены в p $\mathfrak{S}(i, j, T+1)$. Поэтому мы используем тот факт, что каждое G''^* содержит по крайней мере одну НКФ. Тогда, соединяя эту НКФ с какой-либо $\mathfrak{S}_{m^2}(i, j, T)$ из того же G''^*, можно получить необходимые нам отображения $\mathfrak{L}_{(1)} : G''^* \Rightarrow \mathfrak{S} - p$. Число таких отображений равно $p \cdot p!$. А так как число G'^* равно p^8, а G''^* — $(p+1)^8 - p^8$, то, учитывая сказанное выше, можно убедиться, что число функций $\mathfrak{L}_{(1)}$, не порождающих $\mathfrak{ST}(2, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$, обладающих НКФ при отсутствии в них СТКФ, не меньше величины $(p!)^{(p+1)^s} \cdot p^{(p+1)^s - p^s - 1}$. Полагая теперь $\mathfrak{M}[\mathfrak{S}] = p+1 = s$, получаем доказательство теоремы.

Теорема 1.1. *Число* $\mathfrak{ST}(1, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$, *имеющих* НКФ *без* СТКФ *для* $T \geqslant 0$ *таково, что*

$$Q \geqslant (s-1)(s^2 - 2s + 2)[(s-2)!]^{s^2}.$$

В случае же $\mathfrak{ST}(N, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(m)})$ $\quad Q \geqslant (s-2)^{s^{n-1}-1} \cdot [(s-1)!]^{s^{n-1}}$, *где* $n = (2m+1)^N$.

Из теоремы 1 и [6] (см. следствие 1) вытекает следующий

Королларий 2. *Число* $\mathfrak{ST}(2, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ $(\mathfrak{M}[\mathfrak{S}] = s)$, *обладающих* НКФ, *не меньше величины*

$$Q = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i+1} C_s^i (s-i)^{s^9} + [(s-1)!]^{s^8} \cdot (s-1)^{s^8 - (s-1)^8 - 1}.$$

В таких $\mathfrak{ST}(2, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ НКФ *содержатся обязательно уже в блоках размером* 2×2.

Предположим, что имеется бесконечная регулярная система точек решетки U_E^n в E^n и $\forall u \in U_E^n$ может находиться в момент $T \in \mathfrak{T} = N \cup 0$ в одном из состояний $q \in Q(\mathfrak{M}[Q] < \infty)$. В дальнейшем под $\text{КФ}_T(U_E^n)$ будем понимать КФ системы U_E^n в момент T. Введем для $\forall u \in U_E^n$ хорошо определенную окрестность точек Ω_u таких, что $\Omega_u \subset U_E^n$, $u \in \Omega_u$ и $\mathfrak{M}[\Omega_u] = p$. Если $F \subset U_E^n$ и $\mathfrak{M}[F] < \infty$, то будем писать $\overset{\infty}{F}$, а через $q_{u,T}$ будем обозначать состояние точки $u \in U_E^n$ в момент T. На протяжении всей статьи принимаем $\mathfrak{M}[F] < \infty$.

Структурой $\mathfrak{ST}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)$ будем называть систему U_E^n с определенной на ней функцией перехода $\mathfrak{L}_\Omega$ такой, что

$$(\forall T \in \mathfrak{T}), (\forall u \in U_E^n)(\mathfrak{L}_\Omega : \text{КФ}_T(\Omega_u) \Rightarrow q_{u,T+1}).$$

Пусть $\overset{\infty}{F} \subset \overset{\infty}{U_E^n}$, тогда $\text{КФ}(\overset{\infty}{F})$ есть НКФ $\Leftrightarrow (E!\,T = 0)(\text{КФ}(\overset{\infty}{F}) \in \text{КФ}_T(U_E^n))$. $\mathfrak{ST}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)$ обладает НКФ $(\mathfrak{ST}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \ni \in \text{НКФ})$ тогда и только тогда, когда

$$(\exists \overset{\infty}{F} \in U_E^n),\ (E!\,T = 0)(\text{КФ}(\overset{\infty}{F}) \in \text{КФ}_T(U_E^n)).$$

Пусть множество $\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}):\{\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1(i)}(\overset{\infty}{F})\}$ таково, что

$$(\forall i), (\forall T \in \mathfrak{T})\,(\mathfrak{L}_\Omega : \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1(i)}(\overset{\infty}{F}) \in \mathrm{KF}_T(U_E^n) \Rightarrow \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}(\overset{\infty}{F}) \in \mathrm{KF}_{T+1}(U_E^n)).$$

Теорема 2. $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \ni\in$ НКФ $\Leftrightarrow (\exists \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}) = \oslash)$.

Необходимость. Предположим, что

$$(\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}) \neq \oslash)\,\&\,\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \ni\in \text{НКФ}.$$

Следовательно,

$$(\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})), (\exists i)\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1(i)}(\overset{\infty}{F}) \in \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F})).$$

Взяв теперь за начальную КФ $U_E^n\,\mathrm{KF}_0(U_E^n) \ni \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1(i)}(\overset{\infty}{F})$, с помощью функции $\mathfrak{L}_\Omega$ получаем

$$\mathfrak{L}_\Omega : \mathrm{KF}_0(U_E^n) \ni \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1(i)} \Rightarrow \mathrm{KF}_1(U_E^n) \ni \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}). \tag{4}$$

А так как (4) справедливо для $\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})$, то это противоречит тому, что $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \ni\in$ НКФ. Значит

$$\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \ni\in \text{НКФ} \Rightarrow (\exists \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}) = \oslash).$$

Достаточность. Пусть $(\exists \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}) = \oslash)$.

Предположим теперь, что

$$(\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})), (\exists T \in N)\,(\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}) \in \mathrm{KF}_T(U_E^n)).$$

Следовательно, для $\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})$ должно

$$(\exists i)\,((\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1(i)}(\overset{\infty}{F}) \in \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}))\,\&\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1(i)}(\overset{\infty}{F}) \in \mathrm{KF}_{T-1}(U_E^n)).$$

Это же противоречит тому, что $(\exists \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}) = \oslash)$. Значит

$$(\exists \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}) = \oslash) \Rightarrow \mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \ni\in \text{НКФ}.$$

Этим теорема доказана.

Из теоремы 2 для случая $\mathfrak{S}\mathfrak{T}(2, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ получаем

Королларий 3.☆☆ КФ *есть* НКФ $\Leftrightarrow \mathfrak{M}[\mathfrak{L}_{(1)}^{-1}(\text{КФ})] = 0$.

Пусть $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)$ не обладает НКФ ($\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \not\ni\in$ НКФ). Тогда согласно теореме 2 $(\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}) \neq \oslash)$. Предположим, что

☆☆ Этот результат приведен в [2].

$$(\exists \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F_*})), (\exists T^*), (\forall \mathrm{KF}_0(U_E^n))\,(\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F_*}) \notin \mathrm{KF}_{T>T^*}(U_E^n)). \qquad (5)$$

Тогда

$$(\exists p \leqslant T^*)\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-p}(\overset{\infty}{F_*}) = \varnothing). \qquad (6)$$

Действительно, ибо в противном случае

$$(\exists p > T^*)\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-p}(\overset{\infty}{F_*}) \neq \varnothing)\,\&\,(\exists i)\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-p(i)}(\overset{\infty}{F_*}) \in \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-p}(\overset{\infty}{F_*})).$$

Взяв теперь за начальную КФ U_E^n $\mathrm{KF}_0(U_E^n) \ni \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-p}(\overset{\infty}{F_*})$ и пользуясь тем, что $(\forall p)\,(\mathfrak{L}_\Omega : \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-p}(\overset{\infty}{F}) \Rightarrow \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-(p-1)}(\overset{\infty}{F}))$ при $\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{0}(\overset{\infty}{F}) = \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})$, с помощью p-кратного применения $\mathfrak{L}_\Omega$ получаем

$$\mathfrak{L}_\Omega^{(p)} : \mathrm{KF}_0(U_E^n) \ni \mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-p}(\overset{\infty}{F_*}) \Rightarrow \mathrm{KF}_p(U_E^n) \ni \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F_*}),$$

что противоречит (5). Значит при условии выполнения (5) выполняется и (6). Записав теперь (6) в виде

$$(\exists p \leqslant T^*)\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-(p-1)}(\overset{\infty}{F_*})) = \varnothing),$$

получаем противоречие с тем, что

$$(\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(\mathrm{KF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-1}(\overset{\infty}{F}) \neq \varnothing).$$

Этим доказана следующая

Теорема 3. $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \overline{\ni\in} \mathrm{HK\Phi} \Rightarrow (\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})),\ (\forall T),\ (\exists \mathrm{KF}_0(U_E^n))$ $(\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}) \in \mathrm{KF}_T(U_E^n))$.

Будем $\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})$ называть **самозарождающейся** (СЗКФ) в $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(\overset{n}{U_E})$, если возникнув в ней в момент T, она затем появляется для каждого $t = T + \tau$, где τ — элемент счетного множества.

Теорема 4. $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \overline{\ni\in} \mathrm{HK\Phi}\,\&\,((\exists \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\,(R : \{\mathrm{KF}_0(U_E^n)|$ $(\forall \mathrm{KF}_0(U_E^n)),\ (\exists T)\,(\mathfrak{L}_\Omega^{(T)} : \mathrm{KF}_0(U_E^n) \Rightarrow \mathrm{KF}_T(U_E^n) \ni \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}))\};\ \mathfrak{M}[R] = r <$ $< \infty)) \Rightarrow \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})$ — СЗКФ.

Доказательство.

$\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \overline{\ni\in} \mathrm{HK\Phi} \Rightarrow (\forall \mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})),\ (\forall T),\ (\exists \mathrm{KF}_0(U_E^n))\,(\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F}) \in \mathrm{KF}_T(U_E^n))$ (теорема 4).

Значит, множество значений T, при которых в $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E)$ для $\forall \mathrm{KF}_0(U_E^n)$ возникают $\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})$, счетно. Предположим теперь, что для каждой $\mathrm{KF}_0(U_E^n) \in R$ $\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})$ может возникнуть только на подмножестве $T^* \subset T$ ($\mathfrak{M}[T^*] = \tau < \infty$). Тогда множество значений T, при которых в $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)$ для $\forall \text{КF}_0(U_E^n)$ возникают $\text{КF}(\overset{\infty}{F})$, не превышает $r \cdot \tau$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.

Теорема 5. $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)\ \overline{\ni\in}\ \text{НКФ} \Leftrightarrow (\forall \text{КF}(\overset{\infty}{F}))\,(\text{КF}(\overset{\infty}{F}) - \text{СЗКФ})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)\ \overline{\ni\in}\ \text{НКФ}$. Тогда по теореме 4 получаем

$$\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)\ \overline{\ni\in}\ \text{НКФ} \Rightarrow (\forall \text{КF}(\overset{\infty}{F})),\ (\forall T \in N)\,(\text{КF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-T}(\overset{\infty}{F}) \neq \oslash). \tag{7}$$

Справедливость (7) не нарушается при замене N на $N' \subset N$ при условии, что $\mathfrak{M}[N'] = \infty$. Можно показать

$$(\forall T \in N),\ (\forall \text{КF}(\overset{\infty}{F})),\ (\exists \text{КF}(\overset{\infty}{F}_*))\,(\text{КF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-T}(\overset{\infty}{F}) \in \text{КF}(\overset{\infty}{F}_*)).$$

Тогда $\text{КF}_0(U_E^n)$ можно выбрать так, что

$$(\forall T \in N')\,(\text{КF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-T}(\overset{\infty}{F}) \in \text{КF}_0(U_E^n)).$$

Исходя из того, что

$$(\forall T \in N)\,(\mathfrak{L}_\Omega^{(T)} : \text{КF}_{\mathfrak{L}_\Omega}^{-T}(\overset{\infty}{F}) \Rightarrow \text{КF}(\overset{\infty}{F})),$$

получаем

$$(\forall T \in N')\,(\mathfrak{L}_\Omega^{(T)} : \text{КF}_0(U_E^n) \Rightarrow \text{КF}_T(U_E^n) \ni \text{КF}(\overset{\infty}{F})).$$

А так как это справедливо для каждой $\text{КF}(\overset{\infty}{F})$, то получаем

$$\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)\ \overline{\ni\in}\ \text{НКФ} \Rightarrow (\forall \text{КF}(\overset{\infty}{F}))\,(\text{КF}(\overset{\infty}{F}) - \text{СЗКФ}).$$

Доказательство обратного утверждения тривиально. Этим теорема полностью доказана.

Определение 1. Конфигурация $\text{КF}(\overset{\infty}{F})$ называется неподвижной точкой $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)$, если

$$(\forall T'),\ (\text{КF}_T(U_E^n) \ni \text{КF}(\overset{\infty}{F}) \Rightarrow \text{КF}(\overset{\infty}{F}) \in \text{КF}_{T'}(U_E^n)).$$

Теорема 6. *Если* $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)$ *такова, что существует такая* $\overset{\infty}{F}$, *что для* $\forall T > 0$ *в любой* $\text{КF}(\overset{\infty}{F}) \in \text{КF}_T(U_E^n)$ *существует по крайней мере хоть одна неподвижная точка любого размера, то в такой структуре существует* НКФ.

Доказательство теоремы не вызывает затруднений.

Определение 2. Конфигурация $\text{КF}(\overset{\infty}{F})_{\text{univ}}$ в $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)$ называется универсальной, если, полагая $\text{КF}_0(U_E^n) \equiv \text{КF}(\overset{\infty}{F})_{\text{univ}}$, для любой $\text{КF}(\overset{\infty}{F})$ можно найти такое $T > 0$, что $\text{КF}(\overset{\infty}{F}) \in \text{КF}_T(U_E^n)$.

Из определения 2 непосредственно следует

Королларий 4. $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n) \ni\in \text{КF}(\overset{\infty}{F})_{\text{univ}} \Rightarrow \mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(U_E^n)\ \overline{\ni\in}\ \text{НКФ}$.

Теорема 7. *Любая ограниченная* $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(\overset{\infty}{U}{}_E^n)$ *может иметь либо сону, либо все* $\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})_{\mathrm{univ}}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(\overset{\infty}{U}{}_E^n)$ имеет только две универсальные конфигурации F_1 и F_j $(F_1 \neq F_j)$.

Упорядочим множество F всевозможных $\mathrm{KF}(\overset{\infty}{U}{}_E^n)$, исходя из того, что F_1 есть универсальная конфигурация, т. е.

$$\mathfrak{L}_\Omega : F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_j \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_p \Rightarrow F_i \in F, \qquad (8)$$

где $p = \mathfrak{M}[Q]^{*}\mathfrak{M}[\overset{\infty}{U}{}_E^n]$.

А так как F_j также универсальная конфигурация, то нетрудно доказать, что должны выполняться соотношения

$$\mathfrak{L}_\Omega : F_j \Rightarrow F_{j+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_p \Rightarrow F_1. \qquad (9)$$

Сопоставляя теперь (8) и (9), получаем, что должно выполняться $F_i \equiv F_1$, и тогда

$$\mathfrak{L}_\Omega : F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_p \Rightarrow F_1, \qquad (10)$$

т. е. любая $F_e \in F$ $(e = \overline{1, p})$ является универсальной конфигурацией в $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(\overset{\infty}{U}{}_E^n)$. Этим теорема доказана.

Теорема 8. *Если* $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_{\mathfrak{L}_\Omega}(\overset{\infty}{U}{}_E^n)$ *имеет неподвижную точку, то такая структура может иметь не более одной* $\mathrm{KF}(\overset{\infty}{F})_{\mathrm{univ}}$.

Доказательство. Пусть все $\mathrm{KF}(\overset{\infty}{U}{}_E^n)$ являются универсальными. Для этого, как следует из (10), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathfrak{L}_\Omega : F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_e \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_p \Rightarrow F_1. \qquad (11)$$

Нетрудно заметить, что все $F_i \in F$ $(i = \overline{1, p})$ не могут иметь неподвижной точки и из (11) следует, что F_1 не может иметь неподвижной точки. Не нарушая общности положим, что F_e содержит неподвижную точку, но тогда из (11) получаем, что F_i $(i = \overline{e, p})$ и F_1 должны также содержать неподвижную точку.

Полученное противоречие и доказывает нашу теорему.

В заключение работы дадим более простое доказательство одного результата из [5] и приведем теорему о размере внутреннего блока (ВБ) у СТКФ.

Королларий 3. *Функция, определяемая конечным автоматом, безошибочно предсказывающим среду, является примитивно рекурсивной.*

Доказательство. Пусть функция $f(n)$ всюду определена на N со значениями в N; $f(n) \overset{\mathrm{Def}}{=} f(n+P)$; $P = \mathrm{const}$; n, $P \in N$. Рассмотрим множество $\mathfrak{Z} = \{z | z = f(n)\}$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{M}[\mathfrak{Z}] \leqslant P$. Тогда записав характеристическую функцию $\mathfrak{Z}$ в виде

$$X_{\mathfrak{Z}}(n) = \prod_{i=1}^{p-1} \overline{\mathrm{sg}}\, |f(i) - n|,$$

легко получаем, что $X_{\mathfrak{Z}}(n)$ и $\mathfrak{Z}$ примитивно рекурсивны. Определяя двуместную примитивно рекурсивную функцию $\Psi(n, X) = X_{\mathfrak{Z}'}(n) + X$, получаем, что X есть решение $\Psi(n, X) = 0$ тогда и только тогда, когда

$n \in \mathfrak{Z}$. Из [4] следует, что $\mathfrak{Z}$ рекурсивно перечислима. А так как $\mathfrak{Z} \overset{\mathrm{Def}}{=} \{z/z = f(n)\}$, то $f(n)$ примитивно рекурсивна. Поскольку же среда, безошибочно предсказываемая конечным автоматом, должна быть периодической, то обращение к вышесказанному и доказывает королларий 3.

Теорема 9. *Существуют одномерные структуры, обладающие* СТКФ *с* ВБ *размером m, одного из следующих типов:*

1) $m = 1^+, 2^+, 3^+, \ldots, n^+, \ldots;$
2) $m = 1^-, 2^-, 3^-, \ldots, n^-, \ldots;$
3) $m = 1^-, 2^+, 3^+, \ldots, n^+, \ldots;$
4) $m = 1^+, 2^+, 3^-, \ldots, n^-, \ldots;$
5) $m = 1^+, 2^-, 3^+, 4^-, \ldots, n^+, (n+1)^-, \ldots;$
6) $m = 1^-, 2^+, 3^-, 4^+, \ldots, n^-, (n+1)^+, \ldots;$
7) $m = 1^+, 2^-, 3^-, \ldots, n^-, \ldots,$

где знак «+» («—») при $n \in N$ говорит о том, что структура обладает (не обладает) СТКФ *с* ВБ *размером n; число структур типов* 3 *и* 6 *не менее* $(s!)^{s^2-2}/s^2$.

Доказательство теоремы было получено с помощью ЭЦВМ GE-400 на языке FORTRAN-ASA.

Как следствие из теоремы вытекает ответ на вопрос Э. Мура о размере ВБ у СТКФ [6, 7].

Теорема 10. *Число* $\mathfrak{S}\mathfrak{T}(1, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ $(s \geqslant 12)$, *имеющих* СТКФ *в* СКФ, *не меньше* s^{s^3-50}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 159 (1970).
2. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 365 (1970).
3. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Биол., **19**, 266 (1970).
4. Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.
5. Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М., Искусственный интеллект и эволюционное моделирование, М., 1969.
6. Аладьев В., Ефимов Н., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 208 (1971).
7. Moore E., Proc. Symp. Appl. Math., **14**, 17 (1962).

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
5/V 1970

V. ALADJEV

MÕNINGAID NEUMANNI-MOORE'I STRUKTUURIDE HINNANGUID

Artiklis vaadeldakse teatud tüüpi Neumanni-Moore'i struktuuride arvude hinnanguid ja mõningaid teisi nende struktuuridega seotud küsimusi.

V. ALADYEV

SOME ESTIMATIONS FOR NEUMANN-MOORE'S STRUCTURES

In this paper the estimations of the number of a definite type of Neumann-Moore's structures and some other questions connected with those structures are discussed.