

А. ЭПШТЕИН

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РАЗВИТИЯ СТРУИ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ

В настоящее время значительный интерес вызывает струевое течение, которое развивается в потоке, движущемся под определенным углом к направлению истечения струи. Такое течение имеет целый ряд характерных особенностей, отличающих его от более простых струевых процессов (затопленная струя, струя в спутном потоке и т. д.) и затрудняющих его теоретическое изучение.

Приведенные соображения, не претендуя на исчерпывающую строгость, имеют своей целью попытку объяснения некоторых факторов, определяющих развитие турбулентной струи в неограниченном сносящем потоке.

Введем предварительно следующие обозначения:

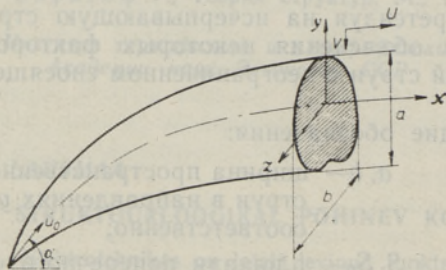
- | | |
|---|---|
| x — криволинейная координата, совмещенная с осью струи; | a, b — ширина пространственной струи в направлениях y, z соответственно; |
| y — координата, перпендикулярная касательной к оси x , в плоскости симметрии струи; | S, S_0 — площади поперечного сечения струи, текущая и начальная соответственно; |
| z — координата, перпендикулярная плоскости xy ; | D_0 — диаметр начального сечения круглой струи; |
| u, v, w — составляющие скорости струи в направлениях x, y, z соответственно; | r — радиус кривизны оси струи; |
| $u_{\text{ф}}, v_{\text{ф}}, u_{\text{т}}, v_{\text{т}}$ — составляющие скорости струи в направлениях x, y на ее фронтальной и тыловой границах соответственно; | ρ — плотность струи и окружающей среды; |
| $w_{\text{т}}$ — составляющая скорости в направлении z на границах струи; | p — статическое давление в струе; |
| u_0 — начальная скорость струи; | $p_{\text{ф}}, p_{\text{т}}$ — статическое давление на фронтальной и тыловой границах струи соответственно; |
| U, V — составляющие скорости сносящего потока в направлениях x, y соответственно; | σ — нормальные напряжения; |
| | τ — касательные напряжения; |
| | Q — секундный объемный расход в поперечном сечении струи. |

Общие уравнения движения и неразрывности в ортогональной криволинейной системе координат xuz (см. рисунок) для течения несжимаемой жидкости при отсутствии объемных сил имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{r}{r+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{uv}{r+y} = \\ & = -\frac{r}{r+y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho - \sigma_{xx}) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right); \quad (1) \\ & \frac{r}{r+y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u^2}{r+y} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho - \sigma_{yy}) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{r}{r+y} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right); \quad (2) \\ & \frac{r}{r+y} u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho - \sigma_{zz}) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{r}{r+y} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right); \quad (3) \\ & \frac{r}{r+y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v}{r+y} = 0. \quad (4) \end{aligned} \right.$$

Здесь $r = r(x)$.

Рассмотрим сначала плоскопараллельное течение. В этом случае из системы (1)–(4) полностью выпадает уравнение (3), а в (1), (2) и (4) будут отсутствовать члены, содержащие скорость w и производные по z .



Поскольку в развитом турбулентном течении напряжения молекулярной вязкости пренебрежимо малы по сравнению с турбулентными напряжениями, будем полагать в (1)–(4) $\sigma_{xx} = -\rho u'^2$, $\sigma_{yy} = -\rho v'^2$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho u'v'$ и т. д., где u' , v' — пульсационные составляющие скорости струи.

Чтобы связать турбулентные напряжения τ и σ с осредненными параметрами течения, воспользуемся формальной аналогией между молекулярным и турбулентным переносом, восходящей к работам Сен-Венана и Буссинеска [1]. В общем случае можно записать в принятой системе координат

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \rho \epsilon_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{r}{r+y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r+y} \right), \quad (5)$$

$$\sigma_{xx} = 2\rho \epsilon_{xx} \left(\frac{r}{r+y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r+y} \right), \quad (6)$$

$$\sigma_{yy} = 2\rho \epsilon_{yy} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (7)$$

Коэффициент турбулентной вязкости ϵ в отличие от его молекулярного аналога является не константой и даже не скалярной величиной, а тензором второго ранга [2]. Составляющие тензора $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, ϵ_{xx} , ϵ_{yy} в общем случае не равны между собой.

Относительно связи этих составляющих с осредненными параметрами течения можно строить различные гипотезы, но вне зависимости

от этого из (5)—(7) явствует, что турбулентные напряжения обращаются в нуль

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0 \quad (8)$$

при

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{r}{r+y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u}{r+y} = 0, \end{array} \right. \quad (9a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{r+y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r+y} = 0, \end{array} \right. \quad (9б)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (9в)$$

Поскольку течение вне струи предполагается безвихревым, соотношения (8) или (9) можно рассматривать как входящие в состав граничных условий для струи в сносящем потоке.

Отметим, что равенства (9б) и (9в) связаны друг с другом уравнением неразрывности (4). Поэтому достаточным является использование лишь одного из них.

Изучение развития струи в сносящем потоке наводит на мысль, что возможны два различных режима перемешивания такой струи.

Если условия течения таковы, что $V \ll u$, то, как следствие, вообще $v \ll u$. Это означает, что уравнения (1), (2), (4), а также (5)—(7) могут быть упрощены путем использования известных допущений теории пограничного слоя ($\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$ для осредненных параметров). Таким образом, в указанных уравнениях могут быть опущены вследствие их относительной малости члены $\frac{r}{r+y} u \frac{\partial v}{\partial x}$, $v \frac{\partial v}{\partial y}$ в (2), $\frac{\partial v}{\partial x}$ в (5) и

$\frac{r}{r+y} \frac{\partial u}{\partial x}$ в (6); кроме того, можно считать $y \ll r$ и следовательно

$\frac{r}{r+y} \approx 1$. Что касается членов, учитывающих влияние центробежных сил, т. е. u^2/r в (2) и u/r в (5), то их величина зависит от порядка величины r . Искривление струи, а следовательно, и центробежные силы связаны в первую очередь с поперечной составляющей импульса присоединенной к струе массы, учитываемой членом $v \frac{\partial v}{\partial y}$ в (2), которым в данном случае вследствие его малости пренебрегают. Нетрудно понять, что и член u^2/r должен иметь тогда тот же порядок малости, что и $v \frac{\partial v}{\partial y}$, т. е. r будет, по крайней мере, на порядок выше x . Следовательно, члены u^2/r и u/r в (2) и (5) также можно опустить. Действительно, в криволинейном пограничном слое с достаточно большим радиусом кривизны поперечный градиент давления определяется в основном градиентом нормальных турбулентных напряжений, поскольку член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$ много больше u^2/r [1].

Таким образом, процесс развития струи в сносящем потоке при $V \ll u$ практически описывается обычными уравнениями свободного неискривленного пограничного слоя. Нарастание массы такой струи определяется действием касательных напряжений τ , связанных с движением частиц струи относительно окружающей среды в продольном направлении.

нии. Роль нормальных напряжений σ в этом процессе является второстепенной. Поскольку условие неразрывности требует, чтобы на границах струи скорость v имела конечное значение даже когда $V = 0$, струя обладает как бы эжектирующим действием. В соответствии с этим указанный режим перемешивания будем называть режимом эжекции. Из уравнений системы (9) основным для определения границы струи будет (9а), в то время как условие (9в) выполняется здесь автоматически ($v_\phi = v_{\max}$).

Для струи в сносящем потоке режим эжекции может иметь место вблизи источника при больших значениях начального отношения скоростей $\frac{u_0}{(U^2 + V^2)^{0,5}}$, а также при начальных углах истечения α_0 , близких к 0 или π . Пока струя находится в режиме эжекции, $V < v_\phi$. При этом суммарное вовлечение в струю остается, по-видимому, таким же, как и в неискривленной струе, хотя действие центробежных сил приводит к перераспределению касательных напряжений поперек струи. Следствием последнего будет увеличение вовлечения с выпуклой поверхности струи при соответствующем уменьшении вовлечения с вогнутой поверхности, т. е. при $|v_\phi| > |v_T|$ [3].

Нужно, однако, иметь в виду, что эжектирующая способность струи является ограниченной. Это значит, что начиная с какого-то момента секундная масса вещества окружающей среды, вовлекаемая в струевое течение за счет действия касательных напряжений, окажется меньше массы потока, набегающего на струю в единицу времени. Но скорость вовлечения с фронтальной поверхности v_ϕ не может быть меньше V , это следует из необходимости выполнения условия (9в). Таким образом, если v_1 не больше V , то может быть только $v_1 = V$.

Этот вывод, полученный на основании несколько формальных соображений, физически можно истолковать в том смысле, что перенос импульса, а следовательно, и величина присоединенной к струе секундной массы определяется уже действием не касательных, а нормальных напряжений, связанных с относительным движением частиц струи в поперечном направлении. Это происходит, когда величина скорости вовлечения $v_\phi = V$, а следовательно, и величины поперечных скоростей v вообще становятся сравнимыми с величинами продольных скоростей u . Поэтому здесь нет уже достаточных оснований пренебрегать в уравнениях (1)–(7) какими-либо членами, и возможность перехода к уравнениям пограничного слоя становится, по меньшей мере, проблематичной.

Назовем данный режим перемешивания струи режимом торможения (поперечная скорость в струе уменьшается от значения $v_\phi = V$ до минимума внутри струи). Он является, как показывает опыт, наиболее характерным для струи в сносящем потоке. При этом основным для определения ее фронтальной границы становится соотношение (9в).

В то же время на тыловой поверхности струи устанавливается скорость v_T , направленная от струи или внутрь ее, причем есть основание предполагать, что отношение v_T/V является достаточно малым.

Изложенные выше для плоскопараллельной струи соображения действительны в качественном отношении для пространственного течения. Хотя последнее имеет ряд характерных для него особенностей, применительно к нему также можно различать режим эжекции ($V \ll u$ и $v_\phi > V$) и режим торможения (V сравнимо с u и $v_\phi = V$), причем последний и здесь является основным.

Одна из особенностей пространственного течения заключается в обтекании струи потоком, что приводит к образованию за струей турбулентной зоны аналогично следу за обтекаемым твердым телом. Эга

зона, на образование которой теряется некоторая доля количества движения струи и небольшая доля тепло- и массосодержания струи, может быть отделена от собственно струи граничным условием

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0, \quad (10)$$

которое может быть развернуто в соотношения типа (5)—(7) и (9), но с учетом пространственного характера течения.

Результатом относительного движения струи в направлении y будет также и эжекция в направлении z за счет действия касательных напряжений τ_{yz} , которая сохраняется и в режиме торможения.

Особенности пространственной струи в режиме торможения, включая и образование парного циркуляционного движения в ее тыловой части, делают сходным такое течение не с типичной струей, а с цилиндрическим клубом, представляющим собой дискретную массу, выпущенную с начальным импульсом из очень длинного щелевидного источника [4].

Для решения некоторых задач, связанных с развитием струи в сносимом потоке (например, определение траектории струи и ее средней скорости), удобно использовать интегральные соотношения, получающиеся путем интегрирования уравнений движения (1)—(3) (с помощью (4)) и уравнения неразрывности (4) по поперечному сечению струи.

В результате такого интегрирования для общего случая пространственного течения получим, учитывая (10) и равенство нулю вследствие симметрии струи относительно плоскости xy ряда интегралов (таким путем полностью выпадает третье уравнение движения), следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_S \frac{r}{r+y} \left(u^2 + \frac{p - \sigma_{xx}}{\rho} \right) dS - \int_b (u_\phi v_\phi + u_\tau w_\tau) dz + \\ + \int_a (u_\phi + u_\tau) w_\tau dy + 2 \int_S \frac{uv}{r+y} dS = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_b (v_\phi^2 - v_\tau^2) dz + \int_b \frac{p_\phi - p_\tau}{\rho} dz + \int_a (v_\phi - v_\tau) w_\tau dy + \\ + \frac{d}{dx} \int_S \frac{r}{r+y} \left(uv + \frac{\tau_{xy}}{\rho} \right) dS - \int_S \frac{u^2 - v^2}{r+y} dS = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} \int_S \frac{r}{r+y} u dS - \int_b (v_\phi + v_\tau) dz - 2 \int_a w_\tau dy + \int_S \frac{v}{r+y} dS = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим возможности упрощения соотношений (11)—(13). Без большой погрешности можно, например, считать, что в режиме торможения величины u_τ и v_τ , по крайней мере, на порядок ниже u_ϕ и v_ϕ соответственно. Тогда $u_\tau v_\tau \ll u_\phi v_\phi$ и $v_\tau^2 \ll v_\phi^2$. В большинстве случаев также скорости v примерно на порядок ниже u , следовательно, $v^2 \ll u^2$. Допустимо считать также $\frac{p - \sigma_{xx}}{\rho} \ll u^2$. Малой можно признать и производную от четвертого интеграла в (12). Если, наконец, кривизна оси струй не слишком велика, то можно принять $y \ll r$ и $\frac{r}{r+y} \approx 1$ и пренебречь интегралами, учитывающими перемещение частиц внутри струи по направлению y , т. е. последними интегралами в (11) и (13).

Таким образом, опуская в (11)–(13) все члены, которые меньше основных на порядок и более, а также учитывая, что в режиме торможения $v_\Phi = V$ и u_Φ близко к U (хотя, строго говоря, и не равно), получим:

$$\frac{d}{dx} \int_S u^2 dS = Q_{вт} U, \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} \int_S u^2 dS = Q_{вт} V + \frac{\Delta p_{ср}}{Q} b, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx} \int_S u dS = Q_{вт}, \quad (16)$$

где отнесенный к единице длины секундный объем, вовлекаемый в струю, $Q_{вт} = Vb + \int \omega_r dy$, а средняя разность давления по обе стороны струи

$\Delta p_{ср} = \frac{1}{b} \int_b^a (p_\Phi - p_\tau) dz$. Уравнение (16) можно также представить в виде

$$\left(\frac{dQ}{dx} \right)_\tau = \frac{d}{dx} \int_S u dS = \kappa Vb, \quad (17)$$

где $\kappa = \left(1 + \frac{\int \omega_r dy}{Vb} \right)$.

Для простоты можно считать $\kappa = \text{const}$. Численное значение κ должно быть определено из эксперимента. По данным [5], κ близко к 1.

Соотношения (14)–(16) приближенно справедливы и для струи в режиме эжекции, но $Q_{вэ}$ должно определяться иначе, чем в (17). Для струи круглого начального сечения в режиме эжекции можно использовать соотношение для затопленной струи, которое допустимо применять и для струи в спутном потоке [6] (последнее соответствует струе в сносящем потоке в режиме эжекции при малых углах истечения α_0),

$$\left(\frac{dQ}{dx} \right)_s = Q_{вэ} = \kappa \frac{S_0}{D_0} u_0, \quad \text{где } \kappa = \text{const}. \quad (18)$$

Соответствующая формула может быть записана и для плоской струи. Пока $Q_{вэ} > Q_{вт}$, струя находится в режиме эжекции. Переход в режим торможения происходит при $Q_{вэ} = Q_{вт}$, и в дальнейшем $Q_{вэ} < Q_{вт}$.

Факт ускоренного нарастания расхода струи в сносящем потоке по сравнению с затопленной струей подтверждается экспериментально непосредственными измерениями [5], а также косвенным путем — на основании более быстрого падения осевой скорости как пространственной, так и плоской струи в сносящем потоке [7–9].

Остается определить еще $\Delta p_{ср}$. Так как статическое давление на фронтальной границе струи должно быть приблизительно равно давлению в невозмущенном потоке (поскольку $v_\Phi = V$, $u_\Phi \approx U$ и учитывая, что скорость $\omega_r \neq 0$ мала), то разность $\Delta p_{ср}$ практически определяется лишь разрежением у тыловой границы, создающимся в режиме торможения главным образом вследствие обтекания струи основным потоком. Можно принять по аналогии с обтеканием твердого тела [10]

$$\Delta p_{ср} = c_n \frac{\rho V^2}{2}, \quad (19)$$

где коэффициент сопротивления c_n определяется опытным путем.

В режиме же эжекции, где обтекание струи выражено очень слабо, $\Delta p_{ср} \approx 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рауз Х., Механика жидкости, М., 1967.
2. Хинце Г., Турбулентность, М., 1963.
3. Prandtl L., In: Einfluß stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz, Berlin, 1930.
4. Scorer R., Natural aerodynamics, London, 1958.
5. Палатник И. Б., Темирбаев Д. Ж., Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики, вып. 4, 196 (1967).
6. Яковлевский О. В., Изв. АН СССР, Отд. мех. и машиностр., № 3, 40 (1961).
7. Иванов Ю. В., Эффективное сжигание подслонных горючих газов в топках, Таллин, 1969.
8. Шандоров Г. С., Истечение в сносящий поток из отверстия в стенке канала и распространения струи в сносящем потоке, М., 1955.
9. Keffer G. F., Baines W. D., J. Fluid Mech., 15, 481 (1963).
10. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй, М., 1960.

Институт термофизики и электрофизики Академии наук Эстонской ССР Поступила в редакцию 2/XII 1970

A. EPSTEIN

RISTVOOLUSES LEVIVA JOA MÕNINGATEST ISEÄRASUSTEST

Artiklis käsitletakse joa segunemist ristvooluses. Püstitatakse hüpotees niisuguse joa kahe erineva segunemisrežiimi olemasolu kohta, mida tinglikult nimetatakse ežekt-siooni- ja pidurdusrežiimiks. Esitatakse valemid erinevate segunemisrežiimide puhul joa mahulise kulu arvutamiseks sekundis ja joa liikumishulga ning massi vahelised lihtsus-tatud integraalsed suhted.

A. EPSTEIN

ON SOME PECULIARITIES OF THE DEVELOPMENT OF A JET IN THE TRANSVERSAL STREAM

The problem of the mixing of a jet in the transversal stream is being considered in the article. A hypothesis about the existence of two various modes of mixing called conventionally the "mode of ejection" and the "mode of braking" has been put forward. Formulae for the calculation of the jet's volume flow for various modes of mixing are proposed, and simplified integral relations for the jet's momentum and mass flow are derived.

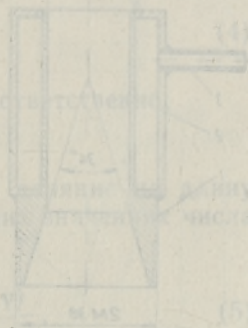


Рис. 1. Конструкция сопла. 1 — сопло; 2 — турбулентная труба.