EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.3.11

УДК 579.95

Т. ЛАУСМАА

СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ В СТРУКТУРНОЙ ЛОГИКЕ

В электротехнике нашли широкое применение функциональные преобразователи, где из совокупности входных функций в каждый момент выбирается одна функция как выход, а нужные коммутации проводятся при помощи информации, определенной порядком между значениями входных функций. Например, в умножителях частоты и выпрямителях при помощи периодических коммутаций входных напряжений на базе информации, принимаемой со входа, можно получить требуемый выход, пользуясь при этом соответственно дросселями с прямоугольной петлей гистерезиса и диодами. В связи с синтезом таких функциональных преобразователей оказывается необходимым рассматривать абстрактные системы, где для каждого вводимого линейного упорядочения конечного множества каких-либо входных величин одна из них выбирается выходом. При этом такая система реализуется при помощи элементов из двух различных категорий, которые выбирают из своего входного упорядоченного множества соответственно его максимальный и минимальный элемент. По аналогии с многозначной и бесконечнозначной логикой можно данную систему рассматривать как обобщение этих же логик и называть структурной логикой с обобщенными операциями дизъюнкции и конъюнкции, так как математически множество входных величин представляет собой структуру, а рассмотренные элементы реализуют операции в этой структуре.

В настоящей работе рассматриваются вопросы синтеза логических схем в структурной логике, составленных на элементах, которые реализуют операции дизъюнкции и конъюнкции. Ввиду того, что система из дизъюнкции и конъюнкции функционально не полна [1], выясняется сперва критерий реализуемости различных логических функций при вводимой системе упорядочений. Проводится синтез логических схем для реализуемых функций. Так как всякой системе, где каждому различному упорядочению значений входных функций действительного переменного ставится в соответствие одна из них как выход, соответствует какая-то логическая функция в структурной логике, то оказывается, что можно составить логические схемы, которые реализуют любые непрерывные выходные функции, соответствующие входным функциям, кроме линейного входа [2], и при одночастотных синусоидальных входных функциях.

Пусть дано линейно упорядоченное множество $\mathfrak{X} = (X, P)$, где на множестве элементов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ определено отношение порядка $P \subset X^2$ при помощи следующих аксиом:

1) $(x_i, x_k) \in P$ либо $(x_k, x_i) \in P$ при любых различных $x_i, x_k \in X$;
2) если $(x_i, x_j) \in P$ и $(x_j, x_k) \in P$, тогда $(x_i, x_k) \in P$.

В дальнейшем вместо $(x_i, x_k) \in P$ будем писать $x_i \prec x_k$ или $x_k \succ x_i$.

Теперь предположим, что на множестве X определено какое-то число m различных отношений порядка P_k, множество которых обозначим через

$$\mathfrak{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}.$$

Так как число всевозможных различных упорядочений на X есть $n!$, то $m \leqslant n!$. Полученный класс упорядоченных множеств обозначим через

$$\mathfrak{X} = \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{X}_k = (X, P_k).$$

Представим $\mathfrak{X}_k$ следующим образом:

$$\mathfrak{X}_k = (x_{q_{1k}}, x_{q_{2k}}, \ldots, x_{q_{jk}}, \ldots, x_{q_{nk}}), \quad \text{где} \quad x_{q_{1k}} \succ x_{q_{2k}} \succ \ldots \succ x_{q_{nk}}.$$

Обозначим

$$x_{q_{jk}} \overset{\mathrm{Def}}{=} \mathfrak{x}_{jk}.$$

Если $\mathfrak{x}_{hk}$ соответствует x_α, то отмечаем этот факт функциональной записью

$$\varphi(\mathfrak{x}_{hk}) = x_\alpha.$$

Если рассматриваем x_α в отношении P_k, то пишем $x_\alpha^{(k)}$.

Определим теперь на каждом $\mathfrak{X}_j \in \mathfrak{X}$ операции «$\vee$» и «$\wedge$» следующим образом:
если

$$x_i^{(j)} \succ x_k^{(j)},$$

то

$$x_i^{(j)} \vee x_k^{(j)} = x_k^{(j)} \vee x_i^{(j)} \overset{\mathrm{Def}}{=} x_i,$$

$$x_i^{(j)} \wedge x_k^{(j)} = x_k^{(j)} \wedge x_i^{(j)} \overset{\mathrm{Def}}{=} x_k.$$

Примем, что

$$x_i^{(j)} \vee x_i^{(j)} = x_i^{(j)} \wedge x_i^{(j)} = x_i.$$

Так как операции «$\vee$» и «$\wedge$» ассоциативны и коммутативны, то можем обозначить

$$x_{i_1}^{(j)} \vee x_{i_2}^{(j)} \vee \ldots \vee x_{i_p}^{(j)} \overset{\mathrm{Def}}{=} \bigvee_{k=1}^{p} x_{i_k}^{(j)} = \max\{x_{i_1}^{(j)}, \ldots, x_{i_p}^{(j)}\},$$

$$x_{i_1}^{(j)} \wedge x_{i_2}^{(j)} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}^{(j)} \overset{\mathrm{Def}}{=} \bigwedge_{k=1}^{p} x_{i_k}^{(j)} = \min\{x_{i_1}^{(j)}, \ldots, x_{i_p}^{(j)}\}.$$

Определим тройку $(X, \vee, \wedge)$ как множество формул, где:
1) элементы $x_i \in X$ — формулы;
2) если a и b формулы, то $a \vee b$ и $a \wedge b$ тоже формулы.

Обозначим $(X, \vee, \wedge)$ через $\mathfrak{U}$. Для каждого P_k $\mathfrak{U}$ представляет собой свободную структуру с операциями «$\vee$» и «$\wedge$».

Рассмотрим теперь функцию

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{f} X,$$

где каждому $\mathfrak{X}_k$ соответствует какой-то элемент x_{j_k} из X, который обозначим через y_k.

Число всевозможных функций f, очевидно, равно n^m. Обозначим класс всех таких функций f через F. Для каждого значения y_i любой функции $f_i \in F$ обозначим

$$\{\varphi(\mathfrak{x}_{ji}) \mid j = 1, \ldots, j_i\} \overset{\mathrm{Def}}{=} X_i$$

и

$$\{\varphi(\mathfrak{x}_{ji}) \mid j = j_i, \ldots, n\} \overset{\mathrm{Def}}{=} \overline{X}_i.$$

где

$$\varphi(\mathfrak{x}_{j_i i}) = y_i.$$

Примем, что функция f реализуется в тройке $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда в ней найдется формула ψ, которая для каждого $P_i \in \mathfrak{P}$ равняется y_i. Отметим это записью $\psi(P_i) = y_i$. При этом будем говорить, что функция f выражается формулой ψ. Для выяснения критериев реализуемости функций в $\mathfrak{U}$ докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $f_\alpha \in F$ была реализуема в $\mathfrak{U}$, необходимо и достаточно, чтобы при любых ее значениях y_i и y_k из $y_k \notin X_i$ следовало, что $X_i \not\subset X_k$.*

Доказательство. Как известно [2, 3], каждую формулу ψ в $\mathfrak{U}$ можно привести к нормальной дизъюнктивной

$$\psi = (\bigwedge_{j\in\sigma_1} x_j) \vee (\bigwedge_{j\in\sigma_2} x_j) \vee \ldots \vee (\bigwedge_{j\in\sigma_u} x_j) = \bigvee_{k=1}^{u} (\bigwedge_{j\in\sigma_k} x_j) \tag{1}$$

или к нормальной конъюнктивной форме

$$\psi = (\bigvee_{j\in\delta_1} x_j) \wedge (\bigvee_{j\in\delta_2} x_j) \wedge \ldots \wedge (\bigvee_{j\in\delta_v} x_j) = \bigwedge_{k=1}^{v} (\bigvee_{j\in\delta_k} x_j), \tag{2}$$

где

$$\sigma_k, \delta_k \subset \{1, 2, \ldots, n\}; \quad u, v \leqslant 2^n.$$

Символы $\bigwedge_{j\in\sigma_k} x_j$ и $\bigvee_{j\in\delta_k} x_j$ означают, что конъюнкция и дизъюнкция берутся по всем элементам x_j, для которых $j \in \sigma_k, \delta_k$.

Предположим, что f_α выражена формулой ψ_α в виде (1). Для отношения P_i получаем, что $\psi_\alpha(P_i) = y_i$. Поэтому в ψ_α имеются дизъюнктивные члены $\psi_{\text{д}i}$, для которых $\psi_{\text{д}i}(P_i) = y_i$. Примем, что для любого α $\psi_{\text{д}\alpha}$ построена на множестве элементов $X_{\text{д}\alpha} \subset X$. Аналогично для отношения P_k получаем, что

$$\psi_{\text{д}k}(P_k) = \min X_{\text{д}k}^{(k)} = y_k.$$

Из предположения $y_k \notin X_i$ следует для всех $X_{\text{д}i}$, что $y_k \notin X_{\text{д}i} \subset X_i$. Поэтому из соотношения

$$\min X_{\text{д}i}^{(k)} \vee \min X_{\text{д}k}^{(k)} = \min X_{\text{д}k}^{(k)} = y_k,$$

которое следует из определения $X_{\text{д}k}$, и предыдущего соотношения получаем, что

$$\min X_{\text{д}i}^{(k)} \prec y_k^{(k)}, \text{ откуда } \min X_{\text{д}i}^{(k)} \notin X_k.$$

Но так как $X_{\text{д}i} \subset X_i$, то $\min X_{\text{д}i}^{(k)} \in X_i$ и поэтому $X_i \not\subset X_k$.

С другой стороны, из соотношений $y_k \notin X_i$ и $X_i \not\subset X_k$ следует, что $\min X_i^{(k)} \prec \min X_k^{(k)}$ и $\min X_i^{(i)} \succ y_k^{(i)}$.
Ввиду этого получаем

$$\min X_i^{(k)} \vee \min X_k^{(k)} = y_k,$$
$$\min X_i^{(i)} \vee \min X_k^{(i)} = y_i.$$

Отсюда, принимая $X_{\text{д}i} = X_i$ и $X_{\text{д}k} = X_k$, вытекает, что f_α выражается формулой ψ_α в виде (1). Теорема доказана.

Из теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Если для функции f найдется хотя бы два значения функции y_i и y_k, для которых действительны соотношения*

$$y_k \notin X_i, \quad X_i \subset X_h. \tag{3}$$

то такая функция не реализуется в $\mathfrak{U}$.

Следствие 2. *Если для функции $f_\alpha \in F$ найдется хотя бы два значения y_i и y_k при $y_i \notin X_k$, то такая функция не реализуется в $\mathfrak{U}$, если*

$$\overline{X}_k \subset \overline{X}_i.$$

Следствие 3. *Если при какой-либо $f_\gamma \in F$ для каждой $y_i = \varphi(\mathfrak{r}_{j_i} i)$ $j_i = j_\gamma$, то такая f_γ всегда реализуется в $\mathfrak{U}$.*

Теперь докажем теорему, позволяющую провести синтез логической схемы для функции f в $\mathfrak{U}$, т. е. найти подходящую формулу, которая реализовала бы данную функцию.

Теорема 2. *Каждую реализуемую в $\mathfrak{U}$ функцию f можно выразить формулой*

$$\psi = (\bigwedge_{j=1}^{j_1} \varphi(\mathfrak{r}_{j1}))\vee(\bigwedge_{j=1}^{j_2} \varphi(\mathfrak{r}_{j2}))\vee\ldots\vee(\bigwedge_{j=1}^{j_m} \varphi(\mathfrak{r}_{jm})) = \tag{4}$$
$$= \bigvee_{k=1}^{m} (\bigwedge_{j=1}^{j_k} \varphi(\mathfrak{r}_{jk})) = \bigvee_{k=1}^{m} \min X_k^{(k)},$$

где

$$\varphi(\mathfrak{r}_{j_k k}) = y_k.$$

Доказательство. Пусть дана какая-нибудь реализуемая в $\mathfrak{U}$ функция f_β. Выразим f_β формулой ψ_β в виде (1). Покажем, что формулу ψ_β можно привести к виду (4).

Примем при $P_i \in \mathfrak{P}$ в формуле ψ_β для всех $X_{дi}$ подстановку

$$X_{дi} \to X_i,$$

которая, очевидно, не изменяет y_i, так как

$$\min X_{дi}^{(i)} = \min X_i^{(i)} = y_i.$$

Но приведенная подстановка не изменяет и других значений f_β, так как если при отношении порядка P_h

$$\min X_{дi}^{(h)} \vee \min X_{дh}^{(h)} = \min X_{дh}^{(h)} = y_h,$$

то и

$$\min X_i^{(h)} \vee \min X_{дh}^{(h)} = \min X_{дh}^{(h)} = y_h,$$

поскольку из-за $X_{дi} \subset X_i$ $\min X_i^{(h)} \prec \min X_{дi}^{(h)}$ или $\min X_i^{(h)} = \min X_{дi}^{(h)}$. Ввиду этого приведенная подстановка дает нам формулу, которая тоже реализует функцию f_β. Если теперь проведем эту подстановку для всех $P_k \in \mathfrak{P}$, то получим формулу

$$\psi'_\beta = \bigvee_{k=1}^{m} \min X_k^{(k)} = \bigvee_{k=1}^{m} (\bigwedge_{j=1}^{j_k} \varphi(\mathfrak{r}_{jk})),$$

которая также реализует функцию f_β (если найдутся в ψ_β такие дизъюнктивные члены $\psi_д$, что $\psi_д(P_i) \neq y_i$ для всех $P_i \in \mathfrak{P}$, то такие $\psi_д$ не влияют на f_β и их можно вычеркнуть), что и требовалось доказать.

Следствие. *Каждая реализуемая в $\mathfrak{U}$ функция f выражается формулой*

$$\psi = \bigwedge_{k=1}^{m} \Big(\bigvee_{j=j_k}^{n} \varphi(\mathfrak{r}_{jk}) \Big) = \bigwedge_{k=1}^{m} \max \overline{X}_k^{(k)},$$

где

$$\varphi(\mathfrak{r}_{j_k k}) = y_k.$$

Рассмотрим теперь периодическую последовательность

$$(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_i,\ \ldots,\ P_m,\ P_1,\ P_2,\ \ldots), \text{ где все } P_i \in \mathfrak{P}.$$

Множество X и эта последовательность определяют теперь матрицу

$$M_f = [\mathfrak{r}_{jk}] \quad (j = 1,\ \ldots,\ n;\ k = 1,\ \ldots,\ m),$$

которую назовем ф у н к ц и о н а л ь н о й м а т р и ц е й. Примем, что M_f эквивалентна M_f', если последнюю можно получить из M_f циклической перестановкой столбцов. Функцию $f_\gamma \in F$ назовем т р а е к т о р и е й в M_f и обозначим ее через f_γ^t тогда и только тогда, когда для столбцов i $(i = 1,\ \ldots,\ m)$ и $i+1$ $(\operatorname{mod} m)$ справедливо, что из $y_{i+1} \notin X_i$ следует $X_i \not\subset X_{i+1}$, а из $y_i \notin X_{i+1}$ следует $X_{i+1} \not\subset X_i$. Когда для f_α^t при всех $k = 1,\ \ldots,\ m$ выполняется $y_k = x_\alpha$, тогда и только тогда такую траекторию f_α^t назовем элементарной траекторией и обозначим через $\varepsilon(x_\alpha)$. Если при двух траекториях $f_\alpha^t = d$ и $f_\beta^t = g$ для столбцов k и $k+1$ $(\operatorname{mod} m)$ соответственно действительны соотношения

$$\begin{cases} d_k^{(k)} > g_k^{(k)}, \\ d_{k+1}^{(k+1)} < g_{k+1}^{(k+1)} \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} d_k^{(k)} < g_k^{(k)}, \\ d_{k+1}^{(k+1)} > g_{k+1}^{(k+1)}, \end{cases}$$

то будем считать, что d и g пересекаются на линии k и обозначим это через $d \overset{k}{\times} g$ или просто $d \times g$. Если траектории d и g пересекаются на каких-то линиях из $i, i+1,\ \ldots,\ k$, то будем считать, что они пересекаются на отрезке $[i, i+1,\ \ldots,\ k]$. Теперь докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 3. *При любых траекториях f^t, если на отрезке $[i, i+1,\ \ldots,\ h,\ \ldots,\ k-1]$ любые элементарные траектории не пересекаются между собой больше одного раза и $y_i \neq y_k$, то элементарные траектории $\varepsilon(y_i)$ и $\varepsilon(y_k)$ пересекаются между собой на этом же отрезке или имеется элементарная траектория $\varepsilon(x_\eta)$, которая пересекает $\varepsilon(y_i)$ и $\varepsilon(y_k)$ соответственно на каких-либо линиях j_1 и j_2 $(j_1 \leqslant j_2)$ из отрезка $[i, i+1,\ \ldots,\ k-1]$ (так, что при $y_i^{(j_1)} \underset{(<)}{>} y_k^{(j_1)}$ $x_\eta^{(j_1)} \underset{(<)}{>} y_i^{(j_1)}$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для столбцов h и $h+1$ $y_h \neq y_{h+1}$. Тогда имеются четыре возможности:

1) $y_{h+1} \notin X_h$ и $y_h \notin X_{h+1}$; (5)
2) $y_{h+1} \notin X_h$ и $y_h \in X_{h+1}$; (6)
3) $y_{h+1} \in X_h$ и $y_h \notin X_{h+1}$; (7)
4) $y_{h+1} \in X_h$ и $y_h \in X_{h+1}$. (8)

Рассмотрим теперь эти возможности.

1. Из (5) следует, что

$$y_{h+1}^{(h)} < y_h^{(h)}, \quad y_{h+1}^{(h+1)} > y_h^{(h+1)}$$

и поэтому

$$\varepsilon(y_h) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1}).$$

2. Так как $y_{h+1} \notin X_h$, то по определению траектории $X_h \not\subset X_{h+1}$. Ввиду этого найдется такое x_η, что $x_\eta \in X_h$ и $x_\eta \notin X_{h+1}$. Отсюда $\overset{(h)}{x_\eta} > \overset{(h)}{y_h}$ или $\overset{(h)}{x_\eta} = \overset{(h)}{y_h}$. Но из (6) вытекает, что $\overset{(h)}{y_{h+1}} < \overset{(h)}{y_h}$. Итак, $\overset{(h)}{x_\eta} > \overset{(h)}{y_{h+1}}$. Но, так как $x_\eta \notin X_{h+1}$, то $\overset{(h+1)}{x_\eta} < \overset{(h+1)}{y_{h+1}}$. Из вышеизложенного следует, что $\varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1})$. С другой стороны, из (6) вытекает, что $\overset{(h+1)}{y_{h+1}} < \overset{(h+1)}{y_h}$. Из соотношений $\overset{(h+1)}{x_\eta} < \overset{(h+1)}{y_{h+1}}$ и $\overset{(h+1)}{y_{h+1}} < \overset{(h+1)}{y_h}$ получаем, что $\overset{(h+1)}{x_\eta} < \overset{(h+1)}{y_h}$. Поэтому и $\varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_h)$ при $\overset{(h)}{x_\eta} > \overset{(h)}{y_h} > \overset{(h)}{y_{h+1}}$.

3. Вследствие симметрии получаем тот же результат, что и в предыдущем случае, т. е. $\varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_h)$ и $\varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1})$, но при $\overset{(h)}{x_\eta} < \overset{(h)}{y_h} < \overset{(h)}{y_{h+1}}$.

4. Из (8) следует, что

$$\overset{(h)}{y_{h+1}} > \overset{(h)}{y_h}, \quad \overset{(h+1)}{y_{h+1}} < \overset{(h+1)}{y_h},$$

поэтому

$$\varepsilon(y_h) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1}).$$

В итоге получаем, что если $y_h \neq y_{h+1}$, то $\varepsilon(y_h) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1})$ или найдется такая $\varepsilon(x_\eta)$, что

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_h), \\ \varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1}) \end{array} \right. \text{ и } x_\eta^{(h)} \underset{(<)}{>} y_h^{(h)}, \text{ если } y_h^{(h)} \underset{(<)}{>} y_{h+1}^{(h)}.$$

Рассмотрим теперь, что следует из $y_j \neq y_h \neq y_{h+1} \neq y_j$ $(j < h)$ для y_j и y_{h+1}, если теорема верна для $\varepsilon(y_j)$ и $\varepsilon(y_h)$. Опять имеют место четыре возможности:

$$1)\ \varepsilon(y_j) \times \varepsilon(y_h) \quad \text{и} \quad \varepsilon(y_h) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1}); \tag{9}$$

$$2)\ \varepsilon(y_j) \times \varepsilon(y_h) \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} \varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_h), \\ \varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1}); \end{array} \right. \tag{10}$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(x_\eta) \times \varepsilon(y_j), \\ \varepsilon(x_\eta) \times \varepsilon(y_h) \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \varepsilon(y_h) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1}); \tag{11}$$

$$4) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(x_\eta) \times \varepsilon(y_j), \\ \varepsilon(x_\eta) \times \varepsilon(y_h) \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} \varepsilon(x_\xi) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_h), \\ \varepsilon(x_\xi) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1}). \end{array} \right. \tag{12}$$

Рассмотрим эти случаи.

1. Из (9) вытекает, что найдется такая $\varepsilon(x_\eta = y_h)$, что

$$\varepsilon(x_\eta) \times \varepsilon(y_j), \quad \varepsilon(x_\eta) \overset{h}{\times} \varepsilon(y_{h+1}).$$

2. Предположим, что

$$y_h^{(j,h,h+1)} > y_{h+1}^{(j,h,h+1)}. \tag{13}$$

Тогда из результата первого случая следует, что

$$x_\eta^{(h)} > y_h^{(h)}, \quad x_\eta^{(h+1)} < y_{h+1}^{(h+1)}.$$

Если на отрезке $[j, \ldots, h]$ $\varepsilon(x_\eta)$ и $\varepsilon(y_j)$ не пересекаются, то, так как $y_j^{(j)} < y_h^{(j)}$ либо $y_j^{(h)} < y_h^{(h)}$ и $y_h^{(j)} < x_\eta^{(j)}$, получаем, что $y_j^{(j,h,h+1)} < x_\eta^{(j,h,h+1)}$. Из этого вытекает, что $y_j^{(h+1)} < y_{h+1}^{(h+1)}$, и так как $y_j^{(j)} > y_h^{(j)}$ либо $y_j^{(h)} > y_h^{(h)}$, то ввиду (13) получаем, что $y_j^{(j)} > y_{h+1}^{(j)}$ либо $y_j^{(h)} > y_{h+1}^{(h)}$, и поэтому $\varepsilon(y_j) \times \varepsilon(y_{h+1})$. Тот же результат получим, если предположим, что $y_h^{(j,h,h+1)} < y_{h+1}^{(j,h,h+1)}$. Поэтому для этого случая получаем, что $\varepsilon(y_j) \times \varepsilon(y_{h+1})$ или на отрезке $[j, \ldots, h]$ $\varepsilon(x_\eta) \overset{h_1}{\times} \varepsilon(y_j)$ $(h_1 \leqslant h)$.

3. Вследствие симметрии получим тот же результат, что и в предыдущем случае.

4. Из (12) ввиду полученного для второго случая результата вытекает, что $\varepsilon(x_\eta) \times \varepsilon(y_{h+1})$ или $\varepsilon(x_\xi) \times \varepsilon(x_\eta)$. Отсюда, а также из (12) опять получаем, что $\varepsilon(y_j) \times \varepsilon(y_{h+1})$ или найдется такая $\varepsilon(x_\nu)$, что на отрезке $[j, \ldots, h]$

$$\varepsilon(x_\nu) \overset{j_1}{\times} \varepsilon(y_j), \quad \varepsilon(x_\nu) \overset{j_2}{\times} \varepsilon(y_{h+1}),$$

причем $j_1 \leqslant j_2$ и $x_\nu^{(j_1)} \underset{(<)}{>} y_j^{(j_1)}$ при $y_j^{(j_1)} \underset{(<)}{>} y_{h+1}^{(j_1)}$.

Этот же результат является общим для всех рассмотренных случаев. По индукции получаем то же самое и для столбцов i и k. Теорема доказана.

Следствие. *Если в функциональной матрице M_f каждая элементарная траектория пересекается с другими элементарными траекториями не более одного раза (не учитывая пересечение на последней линии m), то в такой M_f можно реализовать любые траектории.*

Следствие является обобщением того факта, что при всякой системе линейных входных функций действительного переменного можно составить логическую схему, которая реализует любую непрерывную функцию, соответствующую данной системе [2].

Теорема 4. *Если в функциональной матрице M_f с числом столбцов $m = 2p$ каждая элементарная траектория пересекается со всеми другими элементарными траекториями два раза соответственно на каких-либо линиях l и $l + p$, то в такой M_f можно реализовать любые траектории.*

Доказательство. Пусть в M_f дана какая-нибудь траектория f_γ^t. Предположим, что для столбцов i и k действительны соотношения (3). Так как $y_k = \min X_k^{(k)}$ и $X_i \subset X_k$, то для всех $x_\xi \in X_i$ получаем, что $x_\xi^{(k)} > y_k^{(k)}$. Поэтому и для $y_i \in X_i$ $y_i^{(k)} > y_k^{(k)}$. С другой стороны, так как $y_k \notin X_i$, то $y_k^{(i)} < \min X_i^{(i)}$, для каждого $x_\xi \in X_i$ $x_\xi^{(i)} > y_k^{(i)}$ и поэтому $y_i^{(i)} > y_k^{(i)}$. Итак,

$$y_i^{(i,k)} > y_k^{(i,k)}. \tag{14}$$

Из (14) следует, что $\varepsilon(y_i)$ и $\varepsilon(y_k)$ пересекаются на отрезке $[i, \ldots, k-1]$ либо на отрезке $[k, \ldots, m, 1, 2, \ldots, i-1]$ два раза. Предположим, что они пересекаются на отрезке $[k, \ldots, m, 1, 2, \ldots, i-1]$ два раза. Тогда должно быть $(m - k + i) > p$ и соответственно $(k - i) < p$. Так как $\varepsilon(y_i)$ и $\varepsilon(y_k)$ на $[i, \ldots, k-1]$ не пересекаются, то из теоремы 3 вытекает, что найдется $\varepsilon(x_\eta)$ такое, что $\varepsilon(x_\eta) \overset{j_1}{\times} \varepsilon(y_i)$ и $\varepsilon(x_\eta) \overset{j_2}{\times} \varepsilon(y_k)$ $(j_1 \leqslant j_2)$ при $x_\eta^{(j_1)} > y_i^{(j_1)}$ на том же отрезке. Отсюда ввиду предположения (3) следует, что $\varepsilon(x_\eta)$ и $\varepsilon(y_k)$ должны пересекаться на $[i, \ldots, k-1]$ два раза. Из этого вытекает, что $(k-1) > p$. Как видно, мы натолкнулись на противоречие. Поэтому предположение (3) неверно. Отсюда следует, что в данной функциональной матрице можно реализовать любые траектории, что и требовалось доказать.

Из приведенной теоремы вытекает в виде следствия наш основной вывод.

Пусть дана система синусоидальных функций действительного переменного $\{a_i(t) \mid i = 1, \ldots, n\}$ $(n \geqslant 3)$ *с периодом T. В каждый момент времени значения функций этой системы образуют по порядку убывания какую-то последовательность* $(a_{q_1}, a_{q_2}, \ldots, a_{q_n})$. *Данную систему можно в дискретной форме выразить для периода T следующим образом:*

$$\{a_i(t) \mid i = 1, \ldots, n\} = ((a_{q_{j1}}), (a_{q_{j2}}), \ldots, (a_{q_{jk}}), \ldots, (a_{q_{jm}})) =$$

$$= [a_{q_{jk}}] \quad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m).$$

Рассматривая полученную матрицу в качестве функциональной, из теоремы (4) *получаем, что в такой матрице можно реализовать любые траектории.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С. В., Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **51** (1958).
2. Wilkinson R. H., IEEE Trans. Electr. Comp., **EC-12**, No. 2, 112 (1963).
3. Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952.

Институт термофизики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/VI 1970

T. LAUSMAA

STRUKTUURLOOGIKAL PÕHINEV KOMMUTATSIOONISKEEMIDE SÜNTEES

Elektrotehnikas on laialt levinud funktsionaalsed muundid, kus mingist sisendfunktsioonide hulgast valitakse igal ajahetkel väljundiks üks funktsioon. Vajalikud kommutatsioonid teostuvad seejuures informatsiooni baasil, mis on määratud sisendfunktsioonide väärtuste omavahelise järjestusega. Lähtudes selliste funktsionaalsete muundite sünteesist, vaadeldakse artiklis abstraktseid süsteeme, kus mingite sisendsuuruste hulga igale erinevale järjestusele vastab väljundina üks neist sisendsuurustest, kusjuures süsteem koosneb ainult kahte liiki elementidest, mis valivad järjestatud hulgast vastavalt selle maksimaalse ja minimaalse elemendi. Sellised kommutatsiooniskeemid sünteesitakse ja näidatakse, et ühesageduslike siinuseliste sisendfunktsioonide korral on realiseeritavad antud sisendile vastavad kõikvõimalikud pidevad väljundfunktsioonid.

T. LAUSMAA

SYNTHESIS OF SWITCHING CIRCUITS WITHIN LATTICE LOGIC

In electrical engineering, wide use is made of functional convertors, in which, at every moment, an input function is selected from a set as output, and necessary commutations are performed on the basis of information determined by the mutual order of the values of the input functions. In connection with the synthesis of such functional convertors, it is necessary to study abstract systems in which an input quantity corresponds to each different order of a set as output, the system being composed of only two different kinds of elements that realize the disjunction and conjunction of lattice logic. The synthesis of such switching circuits is accomplished.