

Я. МЕТСАВЭЭР

## О РАССЕЯНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭХО-СИГНАЛОВ УПРУГИМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ОБОЛОЧКАМИ

Нестационарное эхо, рассеянное упругой сферической оболочкой в акустической среде, исследуется при помощи интегральных преобразований. Применяются координатное преобразование Ватсона и преобразование Фурье по времени. При помощи асимптотических формул для функций Ханкеля и Лежандра выведено приближенное замкнутое решение для эхо-сигнала далеко от оболочки. На основе этого решения составлена система уравнений, определяющая параметры оболочки по известным параметрам эхо-сигнала.

Настоящее исследование является развитием работы [1].

Излученный нестационарный эхо-сигнал, рассеянный тонкой упругой сферической оболочкой, можно представить в виде

$$P_r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{1r}(x) e^{-ix\tau} dx, \quad (1)$$

где  $x = \omega R c^{-1}; \quad \tau = ct R^{-1};$

$\omega$  — частота колебаний;  $R$  — радиус оболочки;  $c$  — скорость звука в окружающей оболочку среде;  $t$  — время;  $g(x)$  — спектральная плотность падающего импульса. В качестве спектральной характеристической функции  $p_{1r}(x)$  можно использовать выражение для стационарного излученного эхо, которое в случае находящегося далеко от оболочки источника определяется формулой (см. (2.6) [1])

$$p_{1r}(x) = -\frac{1}{2} i A_0 e^{ikr_0} \int_r \frac{2\mu + 1}{\sin \mu\pi} \frac{L(\mu, x)}{N(\mu, x)} h_{\mu}^{(1)}(kr) e^{i\mu\pi/2} P_{\mu}(\cos \Theta) d\mu. \quad (2)$$

Если точка наблюдения также находится далеко от оболочки, то в случае пустой оболочки характеристическую функцию (2) можно представить в виде

$$p_{1r}(x) = -\frac{A_0}{4kr} e^{ik(r_0+r)} \int_r \frac{2\mu + 1}{\sin \mu\pi} \left[ 1 + \frac{h_{\mu}^{(2)}(x)}{h_{\mu}^{(1)}(x)} \frac{F_p(\mu, x)}{F_0(\mu, x)} \right] P_{\mu}(\cos \Theta) d\mu, \quad (3)$$

где  $F_0(\mu, x)$ ,  $F_p(\mu, x)$  определяются согласно формуле (2.12) работы [1]. Единицу в квадратных скобках (3) можно опустить, так как она не связана с полюсами  $\mu_s$ , являющимися решениями уравнения  $F_0(\mu, x) = 0$ .

Интеграл (3) вычисляется как сумма вычетов в полюсах  $\mu_s$  в виде

$$p_{1r}(x) = -\frac{i\pi A_0}{2kr} e^{ik(r_0+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{2\mu + 1}{\sin \mu\pi} \frac{F_p(\mu, x)}{\partial F_0(\mu, x) / \partial \mu} \frac{h_{\mu}^{(2)}(x)}{h_{\mu}^{(1)}(x)} P_{\mu}(\cos \Theta) \right]_{\mu=\mu_s}. \quad (4)$$



Выражение (4) упрощается, если применить асимптотические формулы функций Ханкеля

$$h_{\mu}^{(1)}(x) \approx e^{i(\sigma - \pi/4)} Q^{-1} x^{-1}, \quad h_{\mu}^{(2)}(x) \approx e^{-i(\sigma - \pi/4)} Q^{-1} x^{-1},$$

где

$$\sigma = x \sqrt{1 - z^2} - z \arccos z, \quad Q = (1 - z^2)^{1/4}, \quad z = (\mu + 1/2) x^{-1},$$

и функции Лежандра

$$P_{\mu}(\cos \Theta) \approx 2\eta \cos(xz\Theta - \pi/4), \quad \eta = (2\pi\mu \sin \Theta)^{-1/2}, \quad (5)$$

справедливой в диапазоне

$$0 < \varepsilon \leq \Theta \leq \pi - \varepsilon, \quad |\mu| \gg \varepsilon^{-1}. \quad (6)$$

Переписав (5) в виде

$$P_{\mu}(\cos \Theta) \approx \eta [e^{i(xz\Theta - \pi/4)} + e^{-i(xz\Theta - \pi/4)}]$$

и воспользуясь подстановкой

$$\frac{1}{\sin \mu\pi} = \frac{2e^{i\pi xz}}{1 + e^{2i\pi xz}},$$

имеем тогда

$$p_{1r}(x) = \frac{A_0 R}{2r} \sum_{s=1}^{\infty} G_s(x) [e^{i(\varphi_1 + \pi/4)} + e^{i(\varphi_2 - \pi/4)}], \quad (7)$$

где

$$\varphi_{1,2} = k[r_0 + r - 2R\sqrt{1 - z_s^2} + z_s R(\pi + 2 \arccos z_s \mp \Theta)] \quad (8)$$

и

$$G_s(x) = - \left[ \frac{4\pi z \eta F_p(\mu, x)}{(1 + e^{2i\pi xz}) \partial F_0(\mu, x) / \partial \mu} \right]_{\mu = \mu_s}, \quad z_s = \frac{\mu_s + 1/2}{x}.$$

Вещественная часть величины в квадратных скобках формулы (8) определяет путь, пройденный волной давления от источника до точки наблюдения. Первые три члена определяют путь, пройденный в акустической среде, а последний — путь в оболочке (периферические волны) или в среде возле оболочки (ползущие волны), отнесенный к скорости звука в акустической среде. Величина  $z_s$  определяет тут отношения скорости звука в акустической среде к соответствующей фазовой скорости периферических или ползущих волн.

Мнимая часть выражения (8) связана с затуханием. Для определения амплитуд излученных волн функцию  $|G_s(x)|$  надо умножить на соответствующий коэффициент

$$\xi_{1,2}(x) = e^{-x[2\delta_0(x) + \delta_{1,2}(x)]}, \quad (9)$$

где

$$\delta_0(x) = \operatorname{Re}(z_s) \operatorname{Im}(\arccos z_s) - \operatorname{Im}(\sqrt{1 - z_s^2}),$$

$$\delta_{1,2}(x) = \operatorname{Im}(z_s) [\pi + 2 \operatorname{Re}(\arccos z_s) \mp \Theta].$$

На рис. 1 представлены пути, проходимые волной давления от источника до точки наблюдения, для одной моды периферических волн, причем отдельно для волн, распространяющихся против (а) и по (б) часовой стрелке в оболочке.

Возвращаясь теперь к формуле (1), можно подстановкой (7) в (1) придать выражению для излученного эхо-сигнала вид



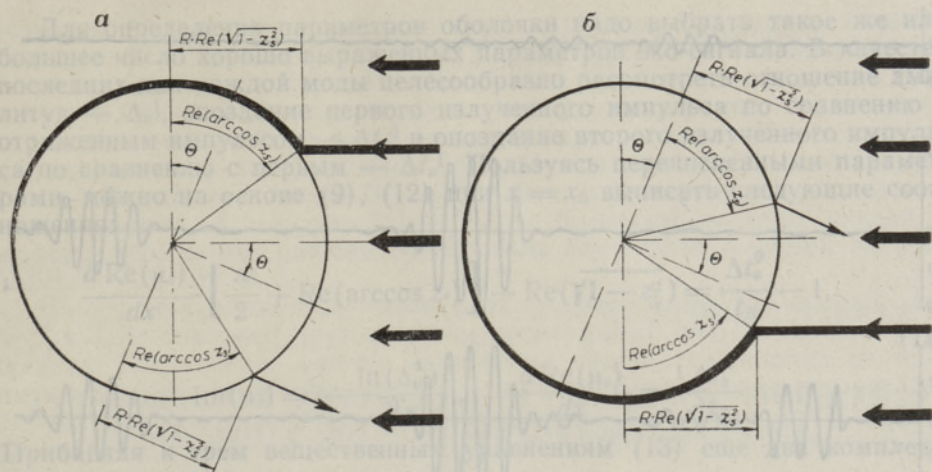


Рис. 1.

$$P_r(\tau) \approx \sum_{s=1}^{\infty} [R_1(\tau) + R_2(\tau)],$$

где

$$R_{1,2}(\tau) = \frac{A_0 R}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) G_s(x) e^{i(\varphi_{1,2} \pm \pi/4 - \tau x)} dx. \quad (10)$$

Если предположить функцию  $G_s(x)$  меняющейся медленно, то ее можно вынести перед интегралом. Разложив теперь  $\text{Re}\varphi_{1,2}$  в ряд Тейлора в точке  $x_0$  и учитывая только два первых члена разложения, имеем

$$R_{1,2}(\tau) \approx \frac{A_0 R}{2r} G_s(x_0) \xi_{1,2}(x_0) e^{i\gamma_{1,2}(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ix \left[ \tau - \frac{r_0+r}{R} - \psi_{1,2}(x_0) \right]} dx, \quad (11)$$

где

$$\gamma_{1,2}(x) = x [\text{Re}(z_s) - d \text{Re}(\mu_s)/dx] [\pi - 2 \text{Re}(\arccos z_s) \mp \Theta] \pm \pi/4, \quad (12)$$

$$\psi_{1,2}(x) = \text{Re} \left[ \frac{d\mu_s}{dx} (\pi + 2 \arccos z_s \mp \Theta) - 2 \sqrt{1 - z_s^2} \right].$$

По определению преобразования Фурье интегралы (11) описывают импульсы, подобные падающим, но сдвинутые по шкале  $\tau$  на величину  $(r_0 + r)R^{-1} + \psi_{1,2}(x_0)$ . Амплитуды этих импульсов определяются соотношениями  $1/2 A_0 R r^{-1} G_s(x_0) \xi_{1,2}(x_0)$ , а сдвиги фаз —  $\gamma_{1,2}(x_0)$ . Но так как до практического затухания периферические волны могут пробегать в оболочке несколько оборотов, то излученное эхо, возбужденное каждой модой периферических волн (11), состоит не из одного импульса, а из последовательности импульсов с уменьшающейся амплитудой.

На рис. 2 представлено эхо, рассеянное в точку источника от пустой алюминиевой оболочки толщиной  $h = 0,05R$  в воде при падении на оболочку синусоидального импульса конечной длины с частотой  $x_0 = 20$  и продолжительностью 1,0 в единицах  $\tau$ . За единицу амплитуды эхо принята амплитуда падающего на оболочку импульса. Кривыми 1, 2 обозначены эхо, возбужденные соответственно первой симметричной и первой кососимметричной модами колебаний, а кривой 3 — полное рассеянное эхо. Все кривые на рис. 2 построены на основе численного



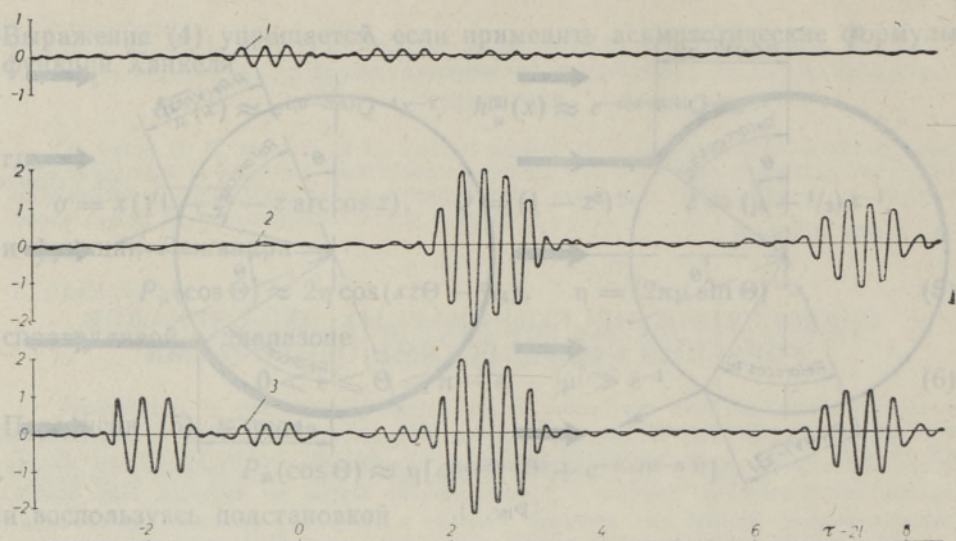


Рис. 2.

интегрирования уравнения (1), причем при вычислении кривых 1, 2 характеристическая функция была принята в виде (4), а при вычислении кривой 3 — в виде ряда по полиномам Лежандра.

Основными параметрами эхо-сигнала, представленного на рис. 2, целесообразно выбрать сдвиг по  $\tau$  первого излученного импульса по сравнению с отраженным импульсом —  $\Delta\tau_s^0$ , сдвиг по  $\tau$  второго излученного импульса по сравнению с первым излученным импульсом —  $\Delta\tau_s^1$  и отношение амплитуды второго излученного импульса к амплитуде первого излученного импульса —  $\Delta_s^1$ . Еще одним параметром является отношение амплитуды первого излученного импульса к амплитуде отраженного импульса —  $\Delta_s^0$ , но если точка наблюдения находится там же, где источник, его не удается пока аналитически определить из-за невыполнения условий (6).

В таблице сопоставлены параметры приведенного на рис. 2 эхо, полученные при помощи приближенных формул (9), (12) и на основе результатов, вычисленных в рядах Фурье.

| Мода               | Метод расчета     | Параметры эхо    |                  |              |
|--------------------|-------------------|------------------|------------------|--------------|
|                    |                   | $\Delta\tau_s^0$ | $\Delta\tau_s^1$ | $\Delta_s^1$ |
| 1 симметричная     | Формулы (9), (12) | 1,61             | 1,68             | 0,68         |
|                    | Ряд Фурье         | 1,6              | 1,7              | 0,6          |
| 1 кососимметричная | Формулы (9), (12) | 4,53             | 5,01             | 0,61         |
|                    | Ряд Фурье         | 4,5              | 5,0              | 0,5          |

На основе формул (9), (12) можно составить систему уравнений для определения параметров сферической оболочки по известным параметрам эхо-сигнала.

Сферическая оболочка без заполнителя характеризуется четырьмя безразмерными и одним размерным параметрами. Все безразмерные параметры связаны с координатами полюсов  $\mu_s$ . Вопрос о том, какие из этих параметров оболочки конкретно выбрать, оставим открытым. В качестве размерного параметра целесообразно взять какой-то промежуток времени, характеризующий радиус оболочки, например  $t_R = 2Rc^{-1}$ .



Для определения параметров оболочки надо выбрать такое же или большее число хорошо выраженных параметров эхо-сигнала. В качестве последних для каждой моды целесообразно рассмотреть отношение амплитуд —  $\Delta s^1$ , опоздание первого излученного импульса по сравнению с отраженным импульсом —  $\Delta t_s^0$  и опоздание второго излученного импульса по сравнению с первым —  $\Delta t_s^1$ . Пользуясь перечисленными параметрами, можно на основе (9), (12) при  $x = x_0$  выписать следующие соотношения:

$$\frac{d \operatorname{Re}(\mu_s)}{dx} \left[ \frac{\pi}{2} + \operatorname{Re}(\arccos z_s) \right] - \operatorname{Re}(\sqrt{1 - z_s^2}) = \frac{\Delta t_s^0}{t_R} - 1, \quad (13)$$

$$\operatorname{Im}(\mu_s) = -\frac{\ln(\Delta_s^1)}{2\pi}, \quad \frac{d \operatorname{Re}(\mu_s)}{dx} = \frac{\Delta t_s^1}{\pi t_R}.$$

Прибавляя к трем вещественным уравнениям (13) еще два комплексных

$$F_0(\mu, x) = 0, \quad \frac{dF_0(\mu, x)}{dx} = 0, \quad (14)$$

получим после разделения их вещественных и мнимых частей для каждой моды семь вещественных уравнений. Учитывая две моды периферических волн, получим для определения пяти параметров оболочки, четырех компонентов координат полюсов и четырех их производных систему из 14 уравнений. Эту систему, по-видимому, целесообразно решать численными методами в смысле наименьших квадратов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Метсавээр Я., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 415 (1970).

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
7/IX 1970

J. METSAVEER

#### MITTESTATSIONAARSETE KAJASIGNAALIDE HAJUMISEST ELASTSETELT SFÄÄRILISTELT KOORIKUTELT

Integraalteisenduste tehnikat kasutades uuriti akustilises keskkonnas olevalt elastset sfääriliselt koorikult hajunud mittestatsionaarset kaja. Aja järgi kasutati Fourier' ja koordinaadi järgi Watsoni teisendust. Hankeli ja Legendre funktsioonide asümptotiliste arenduste baasil saadi koorikust kaugel oleva kaja ligikaudne avaldis suletud kujus. Saadud lahendi alusel koostati võrrandite süsteem kooriku parameetrite määramiseks teadaolevate kaja parameetrite alusel.

J. METSAVEER

#### ON SCATTERING OF TRANSIENT ECHO-SIGNALS BY ELASTIC SPHERICAL SHELLS

Transient echo scattered from the elastic spherical shell in the acoustic medium is studied by the method of integral transformation. The Fourier transformation in time and the Watson transformation in coordinate are used. The approximate far-field solution of echo-signals is obtained in closed form by exploiting asymptotic formulae for Hankel and Legendre functions. On the basis of the solution obtained, a system of equations is proposed for determining the shell parameters from the parameters of echo-signals.