EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.3.05

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН

НАИЛУЧШИЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ x И ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос построения наилучшей формулы (в смысле минимизации остатка [1])

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2r-1} c_k^{(j)} f^{(j)}(x_k)+R_n^{(0)}(f), \tag{1}$$

где $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$ — фиксированы, в классе $W_{01L_2}^{(2r)}$ функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно-непрерывную производную порядка $2r-1$ и удовлетворяют условиям

$$\{\int_0^1 [f^{(2r)}(t)]^2 dt\}^{1/2}\leqslant M, \tag{2}$$

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0 \qquad (k=0,1,\ldots,r-1). \tag{3}$$

В классе $W_{L_2}^{(2r)}$ функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[0,1]$ абсолютно-непрерывную производную порядка $2r-1$ и удовлетворяющих условию (2), рассмотрим задачу построения наилучшей формулы вида

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{2r-1} c_k^{(j)} f^{(j)}(x_k)+R_n(f), \tag{4}$$

где $0=x_0<x_1<\ldots<x_n<x_{n+1}=1$ — фиксированы, $c_0^{(l)}=c_{n+1}^{(l)}=0$ $(l=r,\ r+1,\ \ldots,\ 2r-1)$.

Через $G(x,t)$ мы будем обозначать функцию Грина для задачи $y^{(2r)}(x)=\varphi(x)$ при граничных условиях (3). Эта функция приведена в [2].

Л е м м а 1. *Справедливо равенство*

$$\int_0^1 xG(x,t)\,dx=\frac{t^r(t-1)^r(t+r)}{(2r+1)!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$y_0(t)=\frac{t^r(t-1)^r(t+r)}{(2r+1)!}$$

есть решение задачи

$$\begin{cases} y^{(2r)}(t)=t,\\ y^{(k)}(0)=y^{(k)}(1)=0 \qquad (k=0,1,\ldots,r-1).\end{cases}$$

Но тогда

$$y_0(t) = \int_0^1 xG(t,x)\,dx,$$

откуда в силу того, что $G(x,t) = G(t,x)$, и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Среди многочленов вида*

$$t^{r+1} + a_{r-1}t^{r-1} + \ldots + a_0 \tag{5}$$

наименее уклоняется от нуля на отрезке $[0, x_1]$ по весу t^{2r} в метрике L_2 единственный многочлен

$$Q_{r+1}(t) = \frac{x_1^{r+1}}{C_{4r+2}^{r+1}} P_{r+1}^{(0,2r)}\left(2\frac{t}{x_1} - 1\right) + \\ + \frac{(r+1)(3r+1)x_1^{r+1}}{2(2r+1)C_{4r}^r} P_r^{(0,2r)}\left(2\frac{t}{x_1} - 1\right), \tag{6}$$

где использовано обозначение многочленов Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]. \tag{7}$$

Доказательство. Старший коэффициент многочлена Якоби равен [3]

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n \cdot n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

в силу чего старший коэффициент многочлена (6) равен единице.

Найдем коэффициент a_{n-1} многочлена (7) при x^{n-1}, когда $\alpha = 0$, $\beta = 2r$. Для этого воспользуемся [3] представлением

$$P_n^{(0,2r)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(n!)^2(n+2r)!\,(1-x)^{n-k}(1+x)^k}{k![(n-k)!]^2(2r+k)!} \tag{8}$$

и равенством

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2(n+\beta)!}{k![(n-k)!]^2(k+\beta)!} = \frac{(\beta+2n)!}{(\beta+n)!}. \tag{9}$$

По (8) имеем, что

$$a_{n-1} = -\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-2k)(n!)^2(n+2r)!}{k![(n-k)!]^2(2r+k)!}.$$

Используя (9), имеем

$$a_{n-1} = -\frac{1}{2^n n!}\left\{n\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2(n+2r)!}{k![(n-k)!]^2(2r+k)!} - \right. \\ \left. -2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n!)^2(n+2r)!}{(k-1)![(n-k)!]^2(2r+k)!}\right\} = \\ = -\frac{1}{2^n n!}\left[n\frac{(2r+2n)!}{(2r+n)!} - 2n^2\frac{(2r+2n-1)!}{(2r+n)!}\right] = \\ = -\frac{(2r+2n-1)!\,r}{2^{n-1}(n-1)!\,(2r+n)!}.$$

Учитывая это, мы получаем, что коэффициент при t^r у многочлена (6) равен нулю, т. е. многочлен (6) есть многочлен вида (5).

Поэтому произвольный многочлен $p_{r+1}(t)$ степени $r+1$ вида (5) можно единственным образом представить в виде

$$p_{r+1}(t)=Q_{r+1}(t)+q_{r-1}(t),$$

где $q_{r-1}(t)$ — многочлен степени $r-1$. Тогда, учитывая ортогональность многочленов

$$P_n^{(0,2r)}\left(2\frac{t}{x_1}-1\right)$$

к любому многочлену степени $n-1$ по весу t^{2r} на отрезке $[0,x_1]$, мы получаем равенство

$$\int_0^{x_1} t^{2r}p_{r+1}^2(t)\,dt=\int_0^{x_1} t^{2r}Q_{r+1}^2(t)\,dt+\int_0^{x_1} t^{2r}q_{r-1}^2(t)\,dt.$$

Отсюда видно, что левая часть его принимает наименьшее значение, когда $q_{r-1}(t)\equiv 0$, что и доказывает лемму.

Аналогично доказываются следующие леммы.

Лемма 3. *Среди многочленов вида*

$$t^{r+1}-(2r+1)t^r+a_{r-1}t^{r-1}+\ldots+a_0$$

наименее уклоняется от нуля на отрезке $[0,1-x_n]$ *в метрике* L_2 *по весу* t^{2r} *единственный многочлен*

$$U_{r+1}(t)=\frac{(1-x_n)^{r+1}}{C_{4r+2}^{r+1}}P_{r+1}^{(0,2r)}\left(2\frac{t}{1-x_n}-1\right)+$$

$$+\frac{(1-x_n)^r}{C_{4r}^r}\left[\frac{(1-x_n)(r+1)(3r+1)}{2(2r+1)}-2r-1\right]P_r^{(0,2r)}\left(2\frac{t}{1-x_n}-1\right).$$

Лемма 4. *Среди многочленов вида*

$$t^{2r+1}+a_{2r-1}t^{2r-1}+\ldots+a_0$$

наименее уклоняется от нуля на отрезке $[a-h,\ a+h]$ *в метрике* L_2 *единственный многочлен*

$$L_{2r+1}(t;a,h)=h^{2r+1}l_{2r+1}\left(\frac{t-a}{h}\right)+(2r+1)ah^{2r}l_{2r}\left(\frac{t-a}{h}\right),$$

где $l_k(x)$ $(k=2r,\ 2r+1)$ — *многочлены Лежандра степени* k *со старшим коэффициентом, равным единице.*

Использование свойства ортогональности многочленов Якоби и их норм [3] дает нам доказательство следующей леммы.

Лемма 5. *Справедливы равенства*

$$\int_0^{x_1} t^{2r}Q_{r+1}^2(t)\,dt=x_1^{4r+3}\cdot\gamma_r,$$

$$\int_0^{1-x_n} t^{2r}U_{r+1}^2(t)\,dt=(1-x_n)^{4r+1}\cdot\delta_{r,n},$$

$$\int_{a-h}^{a+h} L_{2r+1}^2(t)\,dt=h^{4r+1}[h^2 s_{2r+1}+(2r+1)^2a^2s_{2r}],$$

где

$$\gamma_r = \frac{1}{4(4r+1)}\left[\frac{(r+1)!\,(3r+1)!}{(2r+1)\,(4r)!}\right]^2\left(1+\frac{1}{(4r+1)\,(4r+3)}\right),$$

$$\delta_{r,n} = \frac{(1-x_n)^2}{[C_{4r+2}^{r+1}]^2(4r+3)} + \frac{1}{[C_{4r}^{r}]^2(4r+1)}\times$$

$$\times\left[\frac{(1-x_n)\,(r+1)\,(3r+1)}{2(2r+1)} - 2r - 1\right]^2,$$

$$s_k = \frac{(k!)^4 2^{2k+1}}{(2k+1)\,[(2k)!]^2} \qquad (k = 2r,\ 2r+1).$$

Точно так же, как в работе [2], мы, используя лемму 1, получим равенство

$$\sup_{f\in W^{(2r)}_{01L_2}} |R_n^{(0)}(f)| = \frac{M}{(2r+1)!}\sqrt{\int_0^1 K^2(t)\,dt},$$

где

$$K(t) = t^r(t-1)^r(t+r) - (2r+1)!\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2r-1} c_k^{(j)} G_{x^j}^{(j)}(x_k, t) -$$

кусочно-непрерывная функция такая, что

$$K(t) = \begin{cases} t^r[t^{r+1} + p_{1,r-1}(t)], & t\in[0, x_1];\\ t^{2r+1} + p_{i,2r-1}(t), & t\in(x_i, x_{i+1}]\quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);\\ -(1-t)^r[(1-t)^{r+1} - (2r+1)(1-t)^r + p_{n,r-1}(1-t)], & \\ & t\in(x_n, 1], \end{cases}$$

а $p_{j,k}(t)$ — многочлены степени k.

На каждом отрезке (x_i, x_{i+1}) $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $x_0 = 1 - x_{n+1} = 0$, функцию $K(t)$ заменим соответствующими многочленами $t^r Q_{r+1}(t)$, $L_{2r+1}(t;\ a_i,\ h_i)$, $-(1-t)^r U_{r+1}(1-t)$, где $a_i = 0{,}5(x_i + x_{i+1})$, $h_i = 0{,}5(x_{i+1} - x_i)$. Пусть функция, которой на отрезке $[0,1]$ мы заменяем функцию $K(t)$, обозначена через $L(t)$. Тогда согласно леммам 2—4 имеем неравенство

$$\int_0^1 K^2(t)\,dt \geqslant \int_0^1 L^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Отсюда заключаем, что если нам удастся выбрать значения $\{c_k^{(j)}\}$ так, что на отрезке $[0,1]$ будет выполнено равенство $K(t) = L(t)$, то найденные значения $\{c_k^{(j)}\}$ и будут весами наилучшей формулы (1) в классе $W^{(2r)}_{01L_2}$.

Воспользуемся методом С. Никольского [1] для определения весов наилучшей формулы. Приравнивая разности выражений* для $K(t)$ на отрезках $(x_i, x_{i+1}]$ и $(x_{i+1}, x_{i+2}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ к соответствующим разностям выражений для функции $L(t)$ на этих же отрезках, получим следующую систему уравнений относительно значений $c_k^{(j)}$:

---

* Эти разности находим точно так же, как в аналогичном случае в [2].

$$\left\{\begin{aligned}
&(2r+1)!\sum_{j=0}^{2r-1} c_1^{(j)}(-1)^{j+1}\frac{(t-x_1)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!}=\\
&\qquad = L_{2r+1}(t; a_1, h_1) - t^r Q_{r+1}(t),\\
&(2r+1)!\sum_{j=0}^{2r-1} c_k^{(j)}(-1)^{j+1}\frac{(t-x_k)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!}=\\
&\qquad = L_{2r+1}(t; a_k, h_k) - L_{2r+1}(t; a_{k-1}, h_{k-1}) \qquad (k=2, 3, \ldots, n-1),\\
&(2r+1)!\sum_{j=0}^{2r-1} c_n^{(j)}(-1)^{j+1}\frac{(\bar t-x_n)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!}=\\
&\qquad = -(1-t)^r U_{r+1}(1-t) - L_{2r+1}(t; a_{n-1}, h_{n-1}).
\end{aligned}\right.$$

Решение этой системы путем разложения правых частей по степеням $(t-x_k)$ даст нам следующие значения:

$$\left\{\begin{aligned}
&c_1^{(j)} = \frac{(-1)^{j+1}}{(2r+1)!}\left[L_{2r+1}(t; a_1, h_1) - t^r Q_{r+1}(t)\right]^{(2r-j-1)}_{t=x_1},\\
&c_k^{(j)} = \frac{(-1)^{j+1}}{(2r+1)!}\left[L_{2r+1}(t; a_k, h_k) - L_{2r+1}(t; a_{k-1}, h_{k-1})\right]^{(2r-j-1)}_{t=x_k},\\
&\qquad\qquad (k=2, 3, \ldots, n-1),\\
&c_n^{(j)} = \frac{(-1)^{j+1}}{(2r+1)!}\left[-(1-t)^r U_{r+1}(1-t) - L_{2r+1}(t; a_{n-1}, h_{n-1})\right]^{(2r-j-1)}_{t=x_n}.
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

В (11) числа $c_k^{(j)}$ выражены через значения производных многочленов Якоби в точке $x=1$.

Из способа получения значений (11) следует, что функции $K(t)$ со значениями (11) и $L(t)$ совпадают на отрезке $[0, 1]$, если они совпадают на отрезке $[0, x_1]$. То, что они совпадают на отрезке $[0, x_1]$, показывается точно так же, как в подобном случае в работе [2].

Таким образом, в классе $W^{(2r)}_{01L_2}$ наилучшая формула (1) характеризуется значениями (11).

Найдем оценку остатка этой формулы. Использовав обстоятельство, что для нее (10) превращается в равенство, и вычисляя правую часть (10) с помощью леммы 5, мы для формулы (1) со значениями (11) получим

$$\sup_{f\in W^{(2r)}_{01L_2}} \left|R_n^{(0)}(f)\right| = \frac{M}{(2r+1)!}\Big\{x_1^{4r+3}\gamma_r + (1-x_n)^{4r+1}\delta_{r,n} + \sum_{k=1}^{n-1} h_k^{4r+1}\left[h_k^2 s_{2r+1} + (2r+1)^2 a_k^2 s_{2r}\right]\Big\}^{1/2}. \tag{12}$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *В классе* $W^{(2r)}_{01L_2}$ *единственная наилучшая формула* (1) *характеризуется значениями* (11) *и оценкой остатка* (12).

Пусть $R_n^{(0)}[x^k]$ означает ошибку формулы (1) со значениями (11) для функции $f(x)=x^k$. Пусть узлы в формуле (1) совпадают с соответствующими узлами формулы (4), а значения

$$c_0^{(j)},\ c_{n+1}^{(j)} \quad (j=0, 1, \ldots, r-1) \tag{13}$$

есть решения системы уравнений

$$\begin{cases} c_0^{(k)} k! + \sum\limits_{j=0}^{k} c_{n+1}^{(j)} \dfrac{k!}{(k-j)!} = R_n^{(0)} [x^k] \\ \qquad\qquad (k = 0, 1, \ldots, r-1), \\ \sum\limits_{j=0}^{r-1} c_{n+1}^{(j)} \dfrac{k!}{(k-j)!} = R_n^{(0)} [x^k] \\ \qquad\qquad (k = r, r+1, \ldots, 2r-1). \end{cases}$$

Тогда формула (4) со значениями (11) и (13) точна для любого многочлена степени $2r-1$, а это рассуждениями, использованными в такой же связи в [2], приводит нас к следующему утверждению.

Т е о р е м а 2. *В классе* $W_{L_2}^{(2r)}$ *наилучшая формула* (4) *характеризуется значениями* (11) *и* (13). *Оценка остатка ее равна значению* (12).

З а м е ч а н и е. Теоремы 1 и 2 могут быть использованы при построении формул приближенного вычисления двойных интегралов в полярных координатах, когда областью интегрирования является круг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н и к о л ь с к и й С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Л е в и н М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 407 (1970).
3. К р ы л о в В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 18/XI 1970

M. LEVIN

PARIMAD FIKSEERITUD SÕLMEDE JA KAALUFUNKTSIOONIGA x INTEGREERIMISE VALEMID

Funktsioonide klassides $W_{01L_2}^{(2r)}$ ja $W_{L_2}^{(2r)}$ (vt. [2]) tuletatakse parimad valemid (vt. [1]) (1) ja (4).

M. LEVIN

THE BEST FORMULAE OF APPROXIMATE INTEGRATION WITH THE WEIGHT FUNCTION x AND FIXED POINTS

The best formulae [1] (1) and (4) have been constructed for the classes $W_{01L_2}^{(2r)}$ and $W_{L_2}^{(2r)}$ [2].