EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.3.04

УДК 517:519.4/5

Ф. ВИХМАНН

О КОНСЕРВАТИВНОСТИ МАТРИЦ ОТНОСИТЕЛЬНО СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ

Пусть задана бесконечная матрица $A = (a_{nk})$. Рассмотрим преобразование

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f_k(x) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

И. Мэддокс [1] доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть задана сходящаяся по мере к $f(x)$ последовательность $\{f_k(x)\}$ измеримых и почти всюду конечных функций на пространстве (X, B, μ) с конечной мерой μ и пусть $|f_k(x)| \leqslant g(x)$, где $g(x)$ есть измеримая и почти всюду конечная функция. Тогда последовательность* (1) *сходится по мере к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда A есть регулярная матрица. Если условие $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ не выполнено, то найдутся пространство (X, B, μ) с конечной мерой, регулярная матрица A и сходящаяся по мере последовательность $\{f_k(x)\}$ такие, что последовательность* (1) *расходится по мере.*

П. Ульянов поставил задачу о консервативности матриц относительно сходимости по мере в случае произвольных сходящихся по мере последовательностей $\{f_k(x)\}$. В настоящей заметке эта задача решена для отрезка $[0, 1]$ с лебеговой мерой.

Лемма. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) \tag{2}$$

сходится по мере при всех сходящихся по мере последовательностях $\{f_k(x)\}$ тогда и только тогда, когда отлично от нуля конечное число коэффициентов a_k.

Доказательство. Достаточность очевидна. Если же имеется бесконечное число коэффициентов $a_{k_i} \neq 0$, где $k_i \uparrow \infty$, то выберем $\{f_k(x)\}$ следующим образом:

$$f_{k_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{k_i}} & \text{при } x \in \left[\dfrac{i}{2^n} - 1,\ \dfrac{i+1}{2^n} - 1\right), \\ 0 & \text{при остальных } x \\ & (2^n \leqslant i \leqslant 2^{n+1} - 1,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \end{cases}$$

$$f_k(x) \equiv 0 \qquad \text{для всех } k \neq k_i.$$

Ясно, что последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится к нулю по мере. Но сумма ряда (2) стремится к бесконечности для всех x из $[0, 1)$.

Теорема 2. *Для того чтобы преобразование* (1) *переводило каждую сходящуюся по мере последовательность* $\{f_k(x)\}$ *измеримых и почти всюду конечных функций в последовательность измеримых и почти всюду конечных функций, сходящуюся по мере, необходимо и достаточно выполнение условий:*

1° *существует* $\lim\limits_n a_{nk} = a_k$,

2° *существует* $\lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk} = a$,

3° $\sup \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$,

4° *существует натуральное число* L *такое, что число отличных от нуля элементов любой строки матрицы* A *меньше, чем* L.

Доказательство. Необходимость. Условия 1°—3° следуют из теоремы Мэддокса. По лемме каждая строка матрицы A может иметь только конечное число отличных от нуля элементов. Допустим, что не существует общей границы L. Определим индуктивно последовательность $\{f_k(x)\}$, сходящуюся к нулю по мере. Возьмем произвольный индекс n_1 и пусть a_{n_1,k_1^1} — последний отличный от нуля элемент строки. Определим для всех $x \in [0, 1]$

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{n_1,k_1^1}} & \text{при } k = k_1^1, \\ 0 & \text{при } k < k_1^1. \end{cases}$$

Дальше найдем $n_2 > n_1$ такое, что a_{n_2,k_2^1} и a_{n_2,k_2^2} — последние отличные от нуля элементы этой строки и $k_1^1 < k_2^1 < k_2^2$. Выберем

$$f_{k_2^1}(x) = \begin{cases} A_0 & \text{при } x \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{при } x \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

$$f_k(x) \equiv 0 \quad \text{при } k_1^1 < k < k_2^2, \quad k \neq k_2^1;$$

$$f_{k_2^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [0, 1/2), \\ A_1 & \text{при } x \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

причем A_0 и A_1 есть решения уравнений

$$a_{n_2,k_1} f_{k_1}(x) + a_{n_2,k_2^1} A_0 = 1/2 \quad \text{при} \quad x \in [0, 1/2),$$

$$a_{n_2,k_1^1} f_{k_1^1}(x) + a_{n_2,k_2^2} A_1 = 1/2 \quad \text{при} \quad x \in [1/2, 1].$$

Ясно, что $A_{n_1}(x) \equiv 1$, $A_{n_2}(x) \equiv 1/2$.

Пусть теперь определено l групп функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, k_l^{2^{l-1}}$. Выберем индекс $n_{l+1} > n_l$ такой, что $a_{n_{l+1},k_{l+1}^1}, \ldots, a_{n_{l+1},k_{l+1}^{2^l}} \neq 0$ и $k_l^{2^{l-1}} < k_{l+1}^1$. Новую группу функций определим для $i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1$

$$f_{k_{l+1}^{i+1}}(x) = \begin{cases} A_i & \text{при } x \in \left[\dfrac{i}{2^l}, \dfrac{i+1}{2^l}\right), \\ 0, & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

где числа A_i вычисляются из уравнений

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{2^{i-1}-1} a_{n_{l+1}, k_i^{2^{i-1}-j}} f_{k_i^{2^{i-1}-j}}(x) + a_{n_{l+1}, k_{l+1}^{i+1}} A_i = \delta_l$$

$$\left(x \in \left[\frac{i}{2^l}, \frac{i+1}{2^l}\right) \right),$$

причем $\delta_l = 1$, если $A_{n_l}(x) \equiv 1/2$, и $\delta_l = 1/2$, если $A_{n_l}(x) \equiv 1$. Другие функции $f_k(x)$, $k_l^{2^{l-1}} < k < k_{l+1}^{2^l}$, приравниваем тождественно к нулю.

Построенная последовательность, очевидно, сходится по мере к нулю. Но частичная последовательность $\{A_{n_l}(x)\}$ расходится, что и доказывает необходимость условия 4°.

Достаточность. Рассмотрим сперва последовательность $\{f_k(x)\}$, сходящуюся к нулю по мере. Обозначим

$$\sup_{k,n} |a_{nk}| = \alpha.$$

Найдем по $\varepsilon > 0$ индекс N такой, что

$$\operatorname{mes} E\left\{x : |f_k| > \frac{\sigma}{4\alpha L}\right\} < \frac{\varepsilon}{4L} \tag{3}$$

для всех $k \geqslant N$ и зафиксированного $\sigma > 0$. Поскольку функции $f_k(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ конечны, то найдется $S > 0$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{mes} E\,\{x : |f_k| > S\} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда соответствующим выбором M можно достичь того, что

$$\operatorname{mes} E\left\{x : \left|\sum_{k=1}^{N-1} (a_{jk} - a_k) f_k\right| > \frac{\sigma}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{4}$$

если только $j \geqslant M$. Из (3) следует

$$\operatorname{mes} E\left\{x : \alpha \sum_{k=N}^{\infty}{}' |f_k| > \frac{\sigma}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4},$$

где Σ' распространяется на любой конечный набор (не больше, чем L) функций f_k. Из последнего неравенства получим

$$\operatorname{mes} E\left\{x : \left|\sum_{k=N}^{\infty}{}' a_{jk} f_k\right| > \frac{\sigma}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Теперь из (4) и (5) следует при $m, n \geqslant M$

$$\operatorname{mes} E\left\{x : \left|\sum_{k=1}^{\infty}{}' a_{mk} f_k - \sum_{k=1}^{\infty}{}' a_{nk} f_k\right| > \sigma\right\} < \varepsilon,$$

т. е.

$$\operatorname{mes} E\,\{x : |A_m(x) - A_n(x)| > \sigma\} < \varepsilon.$$

Значит, последовательность $\{A_n(x)\}$ фундаментальна по мере и тем самым сходится по мере [2].

Если теперь $f_n(x) \to f(x)$ по мере и $f(x) \neq 0$, то из равенства

$$\sum_k a_{nk} f_k = \sum_k a_{nk} (f_k - f) + \sum_k a_{nk} f_k,$$

с учетом условия 2°, следует сходимость $\{A_n(x)\}$ по мере. Теорема доказана.

Примечание. Несложное изменение доказательства показывает, что для регулярности по мере необходимо и достаточно выполнения условий 1°—4° теоремы с $a = 1$ и $a_k = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maddox I. J., J. Math. Soc. (London), **41**, 733 (1966).
2. Канторович Л. В., Акилов Г. Р., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 1/X 1970

F. VICHMANN

MAATRIKSITE KONSERVATIIVSUSEST MÕÕDU JÄRGI KOONDUVUSE SUHTES

Artiklis tõestatakse järgmine teoreem:

Olgu $\{f_k\}$ mõõtuvate ja peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide jada lõigul $[0, 1]$. Jada (1) koondub mõõdu järgi iga mõõdu järgi koonduva jada $\{f_k\}$ korral parajasti siis, kui

1° $\lim\limits_{n} a_{nk} = a_k$,

2° $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k} a_{nk} = a$,

3° $\sup \sum\limits_{k} |a_{nk}| \leq \infty$,

4° leidub naturaalarv L, et nullist erinevate elementide arv maatriksi (a_{nk}) igas reas on väiksem kui L.

F. VICHMANN

ABOUT CONSERVATIVE MATRICES IN RESPECT TO CONVERGENCE IN MEASURE

In this paper the following theorem is proved:

Let $\{f_k\}$ be a sequence of measurable finite a. e. functions on $[0, 1]$. Then the sequence (1) converges in measure whenever $\{f_k\}$ converges in measure if and only if

1° $\lim\limits_{n} a_{nk} = a_k$,

2° $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k} a_{nk} = a$,

3° $\sup \sum\limits_{k} |a_{nk}| < \infty$,

4° the number of the elements that do not vanish in every row is not more than L, which is the same for all rows.