EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.3.03

УДК 538.3

ПИРЕТ КЕРЕС

О ФОРМУЛИРОВКЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ ПОМОЩИ СПИНОРОВ

Теория электромагнитного поля формулируется при помощи спинора электромагнитного поля Φ_A. Приведены уравнения Максвелла для Φ_A. Найдены их интегралы в виде рядов по степеням r^{-1} и шаровым функциям со спинами 0 и 1. Установлена связь между функциями интегрирования и мультипольной структурой источника. Дается простое доказательство теоремы Гольдберга—Керра о расщеплении электромагнитного поля. Приведены выражения компонентов тензора энергии-импульса электромагнитного поля через Φ_A.

1. Введение

Хотя классическая теория электромагнитного поля является хорошо разработанной теорией, представляет интерес ее формулировка при помощи спинорного формализма Ньюмэна—Пенроуза [1–3]. Новая формулировка позволяет легко найти интегралы уравнений Максвелла и установить связь между функциями интегрирования и мультипольной структурой источника без обычных довольно громоздких вычислений. В этой формулировке просто доказывается теорема расщепления электромагнитного поля. Наконец, можно сравнить теорию электромагнитного излучения с теорией гравитационного излучения, спинорной формулировкой которого в последнее время широко пользуются. Это сравнение может вскрыть полезные аналогии и дать новые идеи для дальнейшего развития и интерпретации теории гравитационных волн.

В данной работе рассмотрим электромагнитное поле далеко от излучающих источников, сосредоточенных в конечной области пространства около начала координат. Интересующие нас величины будем искать в виде рядов по шаровым функциям со спинами 0 и 1.

Сначала проинтегрируем уравнения Максвелла, заданные в спинорном представлении при помощи метода, данного в [4]. При этом получим решение, которое содержит произвольные функции интегрирования. Затем найдем связь этих функций интегрирования с мультипольной структурой источника. Наконец докажем теорему расщепления и приведем выражения для тензора энергии-импульса электромагнитного поля. В приложении дадим определения и некоторые свойства шаровых функций со спином n (обобщенных шаровых функций) $Y^l_{nm}(\vartheta, \varphi)$ и дифференциальных операторов $\eth_s$, $\bar{\eth}_s$.

2. Спинорное представление и интегрирование уравнений Максвелла

Будем пользоваться линейным элементом пространства Минковского в координатах Бонди

$$ds^2 = du^2 + 2du\,dr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{1}$$

где r, ϑ, φ — полярные координаты, $u = t - r$ и t — обычная координата времени. Единицы измерения выбраны так, чтобы скорость света $c = 1$.

Введем локальный изотропный репер *

$$\Lambda_{\alpha|\mu} = (l_\mu, k_\mu, m_\mu, \overline{m}_\mu),$$

$$\begin{cases} l_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} u = (1, 0, 0, 0), \\ k_\mu \equiv \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}(u + 2r) = \left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 0,\ 0\right) \\ m_\mu = -\dfrac{r}{\sqrt{2}}(0,\ 0,\ 1,\ i\sin\vartheta). \end{cases} \tag{2}$$

(Знак тождества применяется в данной работе в смысле «равен по определению».) Векторы репера $\Lambda_{\alpha|\mu}$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\begin{gathered} l_\mu l^\mu = k_\mu k^\mu = m_\mu m^\mu = \overline{m}_\mu \overline{m}^\mu = 0, \\ l_\mu k^\mu = -m^\mu \overline{m}_\mu = 1, \\ l_\mu m^\mu = l_\mu \overline{m}^\mu = k_\mu m^\mu = k_\mu \overline{m}^\mu = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Как показали Е. Ньюмэн и Р. Пенроуз [1-3], имеется простая связь между компонентами спинора электромагнитного поля Φ_A и компонентами тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ в локальном репере $\Lambda_\alpha|^\mu$. В дальнейшем мы не будем пользоваться спинорным исчислением, а следуя Е. Ньюмэну и Р. Пенроузу, выразим компоненты спинора Φ_A через компоненты $F_{\mu\nu}$. Вводя также напряженности электрического и магнитного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left[\left(E_\vartheta + \frac{i}{\sin\vartheta}E_\varphi\right) + i\left(H_\vartheta + \frac{i}{\sin\vartheta}H_\varphi\right)\right], \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^\mu k^\nu + \overline{m}^\mu m^\nu) = -\frac{1}{2}(E_r + iH_r), \\ \Phi_2 &= F_{\mu\nu}\overline{m}^\mu k^\nu = -\frac{1}{2\sqrt{2}\,r}\left[\left(E_\vartheta - \frac{i}{\sin\vartheta}E_\varphi\right) + i\left(H_\vartheta - \frac{i}{\sin\vartheta}H_\varphi\right)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти соотношения записываются особенно просто, если воспользоваться комплексным вектором $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{E} + i\mathbf{H}$, предложенным Л. Сильберштейном [5],

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left(Z_\vartheta + \frac{i}{\sin\vartheta}Z_\varphi\right),$$

---

* В данной работе греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3; латинские строчные — 1, 2, 3 и латинские прописные — 0, 1, 2. Черта над символом функции означает комплексное сопряжение.

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} Z_r, \tag{4a}$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}\, r}\left(Z_\vartheta - \frac{i}{\sin\vartheta} Z_\varphi\right).$$

Имеет место также соотношение

$$Z_k = F_{0k} + i\overset{*}{F}_{0k}, \tag{5}$$

где $\overset{*}{F}_{\mu\nu}$ — дуальный к $F_{\mu\nu}$ тензор [6].

Уравнения Максвелла для величин Φ_A следующие [7] $\left(\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial u},\ f_{,r} \equiv \frac{\partial f}{\partial r}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{1,r} + \frac{2}{r}\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\, r}\,\eth_{-1}\Phi_0, \\
&\Phi_{2,r} + \frac{1}{r}\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\, r}\,\eth_0\Phi_1, \\
&\dot{\Phi}_0 = \frac{1}{2}\Phi_{0,r} + \frac{1}{2r}\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}\, r}\,\tilde{\eth}_0\Phi_1, \\
&\dot{\Phi}_1 = \frac{1}{2}\Phi_{1,r} + \frac{1}{r}\Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}\, r}\,\tilde{\eth}_1\Phi_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\eth_s$, $\tilde{\eth}_s$ — операторы дифференцирования по полярным углам, определение и некоторые свойства которых приведены в приложении. Уравнения (6) можно вывести и непосредственно из уравнений Максвелла.

Будем искать решения уравнений (6) в виде разложения по степеням r^{-1} и функциям** $Y^l_{nm}(\vartheta, \varphi)$

$$\Phi_B \equiv \sum_s \overset{(s)}{\Phi}_B r^{-s} = \sum_s \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{Bslm}(u)\, r^{-s} Y^l_{-1+B,m}(\vartheta, \varphi). \tag{7}$$

Теперь дифференциальные операторы $\eth_s$ и $\tilde{\eth}_s$ будут изменять только индекс спина s у Y^l_{sm} и при этом таким образом, что переменные разделяются.

Для коэффициентов разложения A_{Bslm} получим из (6) следующие уравнения [4]:

$$\begin{aligned}
&A_{1slm} = -\frac{i\sqrt{2}\,(s-1)}{\sqrt{l(l+1)}} A_{2slm} - \frac{1}{2} e\delta_{s2}\delta_{l0}, \\
&A_{0slm} = -\frac{2(s-1)(s-2)}{l(l+1)} A_{2slm}, \\
&\dot{A}_{2,s+1,lm} = \frac{(l+s-1)(l-s+2)}{2s} A_{2slm},
\end{aligned} \tag{8}$$

где e — постоянная интегрирования. Отсюда видно, что решение (7)

** Исходя из теоретико-групповых соображений, М. Кармели [8] предлагает также разложение Φ_A по шаровым функциям Y^l_{nm} со спином n, но у него нет разложения по степеням r^{-1}.

уравнений Максвелла (6) вполне определено, если известны коэффициенты $A_{21lm}(u)$, начальные значения коэффициентов $A_{2slm}(u)$ $(s \geqslant 2)$ и постоянная e. Функцию

$$\overset{(1)}{\Phi}_2(u, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{21lm}(u)\, Y_{1m}^{l}(\vartheta, \varphi) \tag{9}$$

называют функцией информации электромагнитного поля, она определяет изменение поля во времени. В следующем параграфе увидим, что постоянная e равна заряду источника.

Проинтегрируем уравнения (8). Положим

$$A_{21lm} = \frac{d^{l+1}}{du^{l+1}}\, a_{lm} \tag{10}$$

и определим из (8) остальные A_{Bslm}. Решение уравнений Максвелла (6) с учетом только первых членов ряда (7) $(l \leqslant 3)$ будет следующим:

$$\begin{aligned}
\Phi_0 = &-\frac{1}{r^3} a_{1m} Y_{-1,m}^{1} - \left(\frac{3}{r^3}\dot{a}_{2m} + \frac{6}{r^4} a_{2m}\right) Y_{-1,m}^{2} - \\
&- \left(\frac{6}{r^3}\ddot{a}_{3m} + \frac{30}{r^4}\dot{a}_{3m} + \frac{45}{r^5} a_{3m}\right) Y_{-1,m}^{3}, \\
\Phi_1 = &-\frac{1}{2}\frac{e}{r^2} - i\left[\left(\frac{1}{r^2}\dot{a}_{1m} + \frac{1}{r^3} a_{1m}\right) Y_{0m}^{1} + \right. \\
&+ \left(\frac{\sqrt{3}}{r^2}\ddot{a}_{2m} + \frac{3\sqrt{3}}{r^3}\dot{a}_{2m} + \frac{3\sqrt{3}}{r^4} a_{2m}\right) Y_{0m}^{2} + \\
&\left. + \left(\frac{\sqrt{6}}{r^2}\dddot{a}_{3m} + \frac{6\sqrt{6}}{r^3}\ddot{a}_{3m} + \frac{15\sqrt{6}}{r^4}\dot{a}_{3m} + \frac{15\sqrt{6}}{r^5} a_{3m}\right) Y_{0m}^{3}\right], \\
\Phi_2 = &\left(\frac{1}{r}\ddot{a}_{1m} + \frac{1}{r^2}\dot{a}_{1m} + \frac{1}{2r^3} a_{1m}\right) Y_{1m}^{1} + \\
&+ \left(\frac{1}{r}\dddot{a}_{2m} + \frac{3}{r^2}\ddot{a}_{2m} + \frac{9}{2r^3}\dot{a}_{2m} + \frac{3}{r^4} a_{2m}\right) Y_{1m}^{2} + \\
&+ \left(\frac{1}{r}\ddddot{a}_{3m} + \frac{6}{r^2}\dddot{a}_{3m} + \frac{18}{r^3}\ddot{a}_{3m} + \frac{30}{r^4}\dot{a}_{3m} + \frac{45}{2r^5} a_{3m}\right) Y_{1m}^{3}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Постоянные интегрирования, порождающие расходящиеся коэффициенты, приравнены нулю.

Далее найдем связь величин a_{lm} с мультипольной структурой источника.

3. Связь функции информации с источником

Из (8) следует, что между коэффициентами в разложении решений Φ_0, Φ_1 и Φ_2 имеется очень простая связь, поэтому достаточно найти коэффициенты разложения только одного из них. Проще всего через мультипольные моменты источника выражаются E_r, H_r и, следовательно, A_{12lm}. Затем нетрудно найти коэффициенты A_{21lm}, определяющие функцию информации. Мы отказываемся здесь от ковариантного описания, которое развивали, например, В. Любошиц и Я. Смородинский [9], потому что имеем в виду описание в дальнейшем отдачи источника.

Пусть источником электромагнитного излучения являются заряды плотностью $\varrho(t, x^i)$ и токи $J^i(t, x^i)$. Исходя из уравнений Максвелла, можно вывести следующие волновые уравнения [10] ($\Box \equiv \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, ∇ — оператор «набла»):

$$\begin{cases} \Box \mathbf{r}\mathbf{H} = -4\pi(\nabla \times \mathbf{J})\mathbf{r}, \\ \Box \mathbf{r}(\dot{\mathbf{E}} + 4\pi\mathbf{J}) = -4\pi\mathbf{r}(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{J})). \end{cases} \tag{12}$$

Учитывая уравнение непрерывности

$$\nabla \mathbf{J} + \dot{\varrho} = 0,$$

получаем из (12)

$$\Box r(\dot{E}_r + i\dot{H}_r) = 4\pi[2\dot{\varrho} + \mathbf{r}\nabla\dot{\varrho} + \mathbf{r}\ddot{\mathbf{J}} - i\mathbf{r}(\nabla \times \dot{\mathbf{J}})]. \tag{13}$$

Интеграл волнового уравнения (13)

$$r(\dot{E}_r + i\dot{H}_r) = -\int \frac{2[\dot{\varrho}] + \mathbf{r}'[\nabla\dot{\varrho}] + \mathbf{r}'[\ddot{\mathbf{J}}] - i\mathbf{r}'[\nabla \times \dot{\mathbf{J}}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \tag{14}$$

где $[F(t, \mathbf{r}')] \equiv F(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')$, можно далеко от источников преобразовать также, как в работе [11]. При $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'$ имеем

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{15}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \mathbf{r} - \mathbf{r}'\cos\Psi + O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{16}$$

где Ψ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Далее,

$$[F(t, \mathbf{r}')] = F(t - r, \mathbf{r}') + \sum_k \frac{r'^k \cos^k \Psi}{k!} \frac{d^k}{du^k} F(t - r, \mathbf{r}') + O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{17}$$

Разложим в ряд

$$\cos^n \Psi = \sum_l \frac{2l+1}{2} C_{ln} P_l(\cos\Psi). \tag{18}$$

Здесь $P_l(\cos\Psi)$ — обычные полиномы Лежандра и

$$C_{ln} \equiv \int_0^\pi \cos^n \Psi \, P_l(\cos\Psi) \sin\Psi \, d\Psi;$$

$$C_{ln} = 0, \quad \text{если} \quad n < l;$$
$$C_{00} = 2;$$

$$C_{2a,2b} = \frac{2^{a+1} b!\,(2b-1)!!}{(2a+2b+1)!!\,(b-a)!}, \qquad b \neq 0, \quad b \geqslant a;$$

$$C_{2a,2b+1} = C_{2a+1,2b} = 0;$$

$$C_{2a+1,2b+1} = \frac{2^{a+1} b!\,(2b+1)!!}{(2a+2b+3)!!\,(b-a)!}, \qquad b \geqslant a.$$

Заменяя в (14) функции в квадратных скобках их выражениями (17), учитывая разложения (15), (18) и выражая угол Ψ в $P_l(\cos\Psi)$ через полярные углы радиус-векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, имеем

$$\dot{E}_r + i\dot{H}_r = -\frac{1}{r^2}\sum_l \sum_{m=-l}^{l} Y_{0m}^l(\vartheta,\varphi)\,\frac{2l+1}{2}\times \tag{19}$$

$$\times\sum_{n=l}^{\infty} C_{ln}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}\int\{2\dot{\varrho}(u,\mathbf{r}') + \mathbf{r}'\nabla\dot{\varrho}(u,\mathbf{r}') +$$

$$+\mathbf{r}'\ddot{\mathbf{J}}(u,\mathbf{r}') - i\mathbf{r}'(\nabla\times\dot{\mathbf{J}}(u,\mathbf{r}'))\}\,r'^n\overline{Y}_{0m}^l(\vartheta',\varphi')\,dV' + O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Из (4), (7) и (19) следует

$$\dot{A}_{12lm}(u) = \frac{2l+1}{4}\sum_{n=l}^{\infty} C_{ln}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}\int\{2\dot{\varrho} + \mathbf{r}'\nabla\dot{\varrho} +$$

$$+\mathbf{r}'\ddot{\mathbf{J}} - i\mathbf{r}'(\nabla\times\dot{\mathbf{J}})\}\,r'^n\overline{Y}_{0m}^l(\vartheta',\varphi')\,dV'. \tag{20}$$

Выразим последний интеграл через мультипольную структуру источника. Примем следующие определения мультипольных моментов источника:

$$I_{lm}^{(p)} \equiv \int \varrho r^p \overline{Y}_{0m}^l\,dV, \tag{21}$$

$$M_{lm}^{(p)} \equiv \int\left(\frac{J_\vartheta}{r} - \frac{iJ_\varphi}{r\sin\vartheta}\right) r^p\overline{Y}_{1m}^l\,dV. \tag{22}$$

В квантовой электродинамике электрические и магнитные мультипольные моменты источника определены соответственно следующим образом [12]:

$$Q_{lm}^{\text{э}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int \varrho r^l\overline{Y}_{0m}^l\,dV,$$

$$Q_{lm}^{\text{м}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi(l+1)}}\int(\mathbf{r}\times\mathbf{J})\,r^l\nabla\overline{Y}_{0m}^l\,dV.$$

Здесь мы заменили ортонормированные шаровые функции Y_{LM}, которые использованы в [12], выражениями $\sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}}\,Y_{0m}^l$.

При $p = l$ связь наших определений с обычно используемыми определениями мультипольных моментов проста

$$Q_{lm}^{\text{э}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}I_{lm}^{(l)},$$

$$Q_{lm}^{\text{м}} = \frac{\sqrt{l}}{4\sqrt{\pi(l+1)}}\left[M_{lm}^{(l)} + (-1)^m\overline{M}_{l,-m}^{(l)}\right]. \tag{23}$$

Для интерпретации определений (13), (14) при $p \neq l$ целесообразно воспользоваться еще одними определениями мультипольных моментов $(x^i \equiv x, y, z)$ [13]

$$I_{i_1,\dots,i_k} \equiv \int \varrho x^{i_1} \dots x^{i_k} dV, \tag{21a}$$

$$M_{i_1,\dots,i_k} \equiv \frac{2}{k} \int \sum_{p=2}^{k} J^{[i_1} x^{i_p]} x^{i_2} \dots x^{i_{p-1}} x^{i_{p+1}} \dots x^{i_k} dV, \tag{22a}$$

которые связаны с мультипольными моментами (21), (22) при помощи общих формул перехода от произведений $x^{i_1} \dots x^{i_k}$ к шаровым функциям (см. приложение). Можно показать, что следы мультипольных моментов (21a), (22a) по первым двум индексам дают линейные комбинации мультипольных моментов $I^{(l+2)}_{lm}$ и $M^{(l+1)}_{lm}$.

Воспользуясь определениями (21), (22), выразим теперь интеграл в правой части равенства (20) через мультипольные моменты источника

$$2 \int \dot{\varrho} r^n \overline{Y}^l_{0m} dV = 2 \dot{I}^{(n)}_{lm},$$

$$\int \mathbf{r}(\nabla \dot{\varrho}) r^n \overline{Y}^l_{0m} dV = \int \nabla (\mathbf{r} \dot{\varrho} r^n \overline{Y}^l_{0m}) dV - \int 3 \dot{\varrho} r^n \overline{Y}^l_{0m} dV -$$

$$- \int \dot{\varrho} n r^n \overline{Y}^l_{0m} dV - \int \dot{\varrho} r^n \mathbf{r} \nabla \overline{Y}^l_{0m} dV = -(3+n) \dot{I}^{(n)}_{lm},$$

$$\int \ddot{\mathbf{J}} \mathbf{r} r^n \overline{Y}^l_{0m} dV = \frac{1}{2} \int \nabla (r^2 \ddot{\mathbf{J}} r^n \overline{Y}^l_{0m}) dV - \frac{1}{2} \int r^2 \nabla \ddot{\mathbf{J}} r^n \overline{Y}^l_{0m} dV -$$

$$- \frac{n}{2} \int \ddot{\mathbf{J}} \mathbf{r} r^n \overline{Y}^l_{0m} dV - \frac{1}{2} \int \ddot{\mathbf{J}} r^{n+2} \nabla \overline{Y}^l_{0m} dV,$$

$$(2+n) \int \ddot{\mathbf{J}} \mathbf{r} r^n \overline{Y}^l_{0m} dV = \dddot{I}^{(n+2)}_{lm} - \frac{i\sqrt{l(l+1)}}{2} [\ddot{M}^{(n+1)}_{lm} - (-1)^m \ddot{\overline{M}}^{(n+1)}_{l,-m}],$$

$$-i \int \mathbf{r}(\nabla \times \dot{\mathbf{J}}) r^n \overline{Y}^l_{0m} dV = -i \int \nabla \{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{J}}) r^n \overline{Y}^l_{0m}\} dV +$$

$$+ i \int (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{J}}) r^n \nabla \overline{Y}^l_{0m} dV =$$

$$= \frac{i\sqrt{l(l+1)}}{2} [\dot{M}^{(n)}_{lm} + (-1)^m \dot{\overline{M}}_{l,-m}]. \tag{24}$$

Здесь мы предположили, что интегрирование производится по области, на границе которой источников нет, вследствие чего часть интегралов, содержащих дивергенцию, превращается в ноль.

Учитывая, что $M^{(0)}_{00} = 0$, получим из (20) при $l = n = 0$ выражение для постоянной интегрирования e в (8)

$$e = \int \varrho dV. \tag{25}$$

Отсюда видно, что e действительно равняется заряду источника.

При помощи рекуррентных формул (8) найдем связь между коэффициентами A_{21lm} в разложении функции информации и коэффициентами $\dot{A}_{12lm}$

$$A_{21lm} = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}} \dot{A}_{12lm}. \tag{26}$$

Теперь можем выписать искомые выражения коэффициентов разложения функции информации в (9) через мультипольные моменты источника

$$A_{21lm} = -\frac{\sqrt{2}(2l+1)}{4\sqrt{l(l+1)}} \sum_{n=l}^{\infty} C_{ln} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{du^n} \Big\{ i(n+1) \dot{I}_{lm}^{(n)} +$$

$$+ \frac{i}{n+2} \dddot{I}_{lm}^{(n+2)} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2} \Big[\dot{M}_{lm}^{(n)} + (-1)^m \dot{\bar{M}}_{l,-m}^{(n)} - \qquad (27)$$

$$- \frac{1}{n+2} \big(\ddot{M}_{lm}^{(n+1)} - (-1)^m \ddot{\bar{M}}_{l,-m}^{(n+1)} \big) \Big] \Big\}.$$

Отсюда по формуле (10) величины a_{lm} можно выразить через мультипольные моменты источника.

4. Теорема Гольдберга—Керра

Рассмотрим асимптотические свойства решения уравнений Максвелла. Из рекуррентных уравнений (8) вытекает, что $A_{11lm} = A_{01lm} = A_{02lm} = 0$ и компоненты Φ_A имеют следующие асимптотические свойства:

$$\Phi_0 \sim \frac{1}{r^3}, \quad \Phi_1 \sim \frac{1}{r^2} \quad \Phi_2 \sim \frac{1}{r}. \qquad (28)$$

Исходя из соотношений (4), выразим $F_{\mu\nu}$ через Φ_A

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} = \Phi_2 l_{[\mu} m_{\nu]} + \bar{\Phi}_2 l_{[\mu} \bar{m}_{\nu]} +$$

$$+ (\Phi_1 + \bar{\Phi}_1) k_{[\mu} l_{\nu]} + (\Phi_1 - \bar{\Phi}_1) m_{[\mu} \bar{m}_{\nu]} +$$

$$+ \Phi_0 \bar{m}_{[\mu} k_{\nu]} + \bar{\Phi}_0 m_{[\mu} k_{\nu]}. \qquad (29)$$

Здесь $2l_{[\mu} m_{\nu]} \equiv l_\mu m_\nu - l_\nu m_\mu$.

Учитывая (28) и условия ортогональности (3), легко показать, что если тензор поля $F_{\mu\nu}$ разложить по степеням r^{-1}

$$F_{\mu\nu} = \frac{N_{\mu\nu}}{r} + \frac{\text{III}_{\mu\nu}}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \qquad (30)$$

то коэффициенты этого разложения удовлетворяют следующим условиям:

$$N_{\mu\nu} l^\nu = 0,$$

$$\text{III}_{\mu\nu} l^\nu = A l_\mu. \qquad (31)$$

Следовательно, $N_{\mu\nu}$ и $\text{III}_{\mu\nu}$ описывают алгебраически специальные поля; при этом $N_{\mu\nu}$ соответствует плоской волне.

Первыми получили этот результат Дж. Гольдберг и Р. Керр [14] путем довольно громоздких вычислений.

5. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

При помощи спинорного формализма очень просто вычисляется тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Пусть

$$\langle\alpha\beta\rangle \equiv 8\pi T_{\mu\nu}\Lambda_{\alpha|}{}^{\mu}\Lambda_{\beta|}{}^{\nu}, \tag{32}$$

$$\langle\alpha\beta\rangle \equiv \sum_k \langle k\,|\,\alpha\beta\rangle r^{-k} \equiv \sum_k \sum_l \sum_{m=-l}^{l} \langle k\,|\alpha\beta|\,lm\rangle r^{-k} Y^l_{nm}. \tag{33}$$

Компоненты $\langle\alpha\beta\rangle$ можно выразить через Φ_A [4]

$$\begin{aligned} &\langle 00\rangle = 4\Phi_0\overline{\Phi}_0, && \langle 33\rangle = 4\Phi_2\overline{\Phi}_0, \\ &\langle 03\rangle = 4\Phi_1\overline{\Phi}_0, && \langle 2|11\rangle = 4\overset{(1)}{\Phi}_2\overset{(1)}{\Phi}_2, \\ &\langle 23\rangle = 4\Phi_1\overline{\Phi}_1, && \langle 2|13\rangle = 4\overset{(1)}{\Phi}_2\overset{(2)}{\overline{\Phi}}_1, \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\overset{(s)}{\Phi}_B = \sum_l \sum_{m=-l}^{l} A_{Bslm} Y^l_{-1+B,m}.$$

В качестве примера применения спинорного формализма рассмотрим унос массы источника электромагнитными волнами. Известно, что

$$T_{00} = w = \mathfrak{ns} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{35}$$

где w — плотность энергии электромагнитного поля; $\mathfrak{n}$ — единичный нормальный вектор сферы $r = \mathrm{const}$; $\mathfrak{s}$ — вектор Пойнтинга. Учитывая выражения (28), (32), (33) и (2), имеем

$$T_{00} = \langle 2\,|\,11\rangle + O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Интегрируя по сфере $r = \mathrm{const}$, имеем

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{ns}\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 T_{00}\overline{Y}^0_{00} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi + O\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\langle 2\,|11|\,00\rangle + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

откуда при $r\to\infty$ для полной массы, уносимой электромагнитным излучением, получаем

$$M = \frac{1}{2}\langle 2\,|11|\,00\rangle. \tag{36}$$

Этот результат можно выразить при помощи формул (34) и (9) еще следующим образом:

$$M = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{l'=1}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'} (-1)^{m'+1} 2A_{21lm}\overline{A}_{21l',-m'} \times$$

$$\times C(l, l', 0;\ 1, -1, 0)\, C(l, l', 0;\ m, m', 0), \tag{37}$$

где $C(l_1, l_2, l;\ m_1, m_2, m_1 + m_2)$ — коэффициенты Клебша—Гордана.

Для чистого электрического дипольного излучения имеем

$$M = \frac{2}{3} \sum_{m=-1}^{1} (-1)^m \ddot{I}^{(1)}_{1m} \ddot{\bar{I}}^{(1)}_{1,-m},$$

что совпадает с соответствующим результатом классической электродинамики [6].

Приложение

Шаровые функции $Y^l_{nm}(\vartheta, \varphi)$ со спином n и дифференциальные операторы $\eth_s$, $\bar{\eth}_s$

а) Определение Y^l_{nm} [15].

$$Y^l_{nm}(\vartheta, \varphi) = P^l_{nm}(\cos\vartheta)\, e^{im\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$P^l_{nm}(z) = (-1)^{l-n} i^{m-n} 2^{-l} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!\,(l+n)!\,(l-n)!}} \times$$

$$\times (1-z)^{-\frac{m-n}{2}} (1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \frac{d^{l-m}}{dz^{l-m}} [(1-z)^{l-n}(1+z)^{l+n}].$$

Функции $Y^l_{nm}(\vartheta, \varphi)$ связаны с функциями $\tilde{Y}^l_{mn}(\vartheta, \varphi)$, использованными в [4], следующим образом:

$$Y^l_{nm} = (-1)^n i^m \bar{\tilde{Y}}^l_{mn}.$$

б) Выражения Y^l_{0m} при $l \leqslant 3$.

$Y^0_{00} = 1$;

$$rY^1_{0m} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm x - iy), z \right\}, \qquad m = \mp 1, 0;$$

$$r^2 Y^2_{0m} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (x^2 - y^2 \mp 2ixy), \sqrt{\frac{3}{2}}\, z(\pm x - iy), \frac{1}{2}(3z^2 - r^2) \right\},$$

$$m = \mp 2, \mp 1, 0;$$

$$r^3 Y^3_{0m} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{4} (\pm x^3 \mp 3xy^2 - 3ix^2y + iy^3, \frac{\sqrt{30}}{4} z(x^2 - y^2 \mp 2ixy), \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{3}}{4} (5z^2 - r^2)(\pm x - iy), \frac{1}{2}(5z^3 - 3zr^2) \right\}, \quad m = \mp 3, \mp 2, \mp 1, 0.$$

в) Ортогональность.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^l_{nm} \bar{Y}^k_{np} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{lk}\delta_{mp}.$$

г) Свойства симметрии.

$$P^l_{-n,m} = P^l_{n,-m}; \quad \bar{P}^l_{nm} = (-1)^{n-m} P^l_{nm}; \quad \bar{Y}^l_{nm} = (-1)^{n-m} Y^l_{-n,-m}.$$

д) Дифференциальные операторы $\eth_s$, $\bar{\eth}_s$.

Дифференциальные операторы $\eth_s$, $\bar{\eth}_s$ определены по их влиянию на шаровые функции со спином s

$$\eth_s Y^l_{sm} \equiv \sin^s\vartheta\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\sin^{-s}\vartheta\, Y^l_{sm} = -i\sqrt{(l-s)(l+s+1)}\,Y^l_{s+1,m},$$

$$\tilde{\eth}_s Y^l_{sm} \equiv \sin^{-s}\vartheta\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\sin^{s}\vartheta\, Y^l_{sm} = -i\sqrt{(l+s)(l-s+1)}\,Y^l_{s-1,m}.$$

Связь с дифференциальными операторами D_{np}, использованными в [4],

$$\eth_s = D_{s,s+1}, \quad \tilde{\eth}_s = D_{s,s-1}.$$

Связь с операторами $\eth$, $\bar{\eth}$, использованными в [16],

$$\eth = -\overline{(\eth_s)}, \quad \bar{\eth} = -\overline{(\tilde{\eth}_s)}.$$

В заключение выражаю благодарность В. Унту за большое внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Penrose R., Ann. Phys., 10, 171 (1960).
2. Newman E., Penrose R., J. Math. Phys., 3, 566 (1962).
3. Newman E., Penrose R., J. Math. Phys., 4, 998 (1963).
4. Unt V., Preprint FAI — 1, Tartu, 1969.
5. Silberstein L., Ann. Phys., 22, 579 (1907).
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1967.
7. Janis A. I., Newman E., J. Math. Phys., 6, 902 (1965).
8. Carmeli M., J. Math. Phys., 10, 1699 (1969).
9. Любошиц В. Л., Смородинский Я. А., ЖЭТФ, 42, 846 (1962).
10. Campbell W. B., Morgan T., Preprint OAP — 215, 1970.
11. Унт В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 421 (1969).
12. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, М., 1969.
13. Pirani F. A. E., Lectures on General Relativity, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, 1964, New Jersey, 1965.
14. Goldberg J. N., Kerr R. P., J. Math. Phys., 5, 172 (1964).
15. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958.
16. Goldberg J. N., Macfarlane A. J., Newman E., Rohrlich F., Sudarshan E. C. G., J. Math. Phys., 8, 2155 (1967).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/XI 1970

PIRET KERES

ELEKTROMAGNETILISE VÄLJA TEOORIA FORMULEERIMISEST SPIINORITE ABIL

Artiklis antakse Maxwelli võrrandid elektromagnetilise välja spiinori Φ_A jaoks ja leitakse nende võrrandite integraalid ridadena r^{-1} astmete ja spinniga n kerafunktsioonide Y^l_{nm} järgi. Lahendis esinevad integreerimisfunktsioonid avaldatakse allika multipolstruktuuri kaudu. Üksikasjalikumalt uuritakse elektromagnetilise välja asümptootilisi omadusi. Lõpuks esitatakse Φ_A kaudu elektromagnetilise välja energia-impulsstensori komponentide avaldised.

PIRET KERES

A SPINOR APPROACH TO THE MAXWELL EQUATIONS

The Maxwell equations (6) for the spinors Φ_A are given, and their solutions (7), (8) and (11) are found. The expression (27) for the news function (9) is found in terms of the multipole moments (21) and (22). Asymptotic properties of the electromagnetic field are discussed. The components of the energy tensor are expressed in terms of Φ_A.