EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.3.02

УДК 530.12:531.51

И. ПИЙР

СКАЛЯРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

В настоящей работе исследуется в координатах Бонди распространение сферических волн произвольной мультипольной структуры при заданной шварцшильдовской метрике пространства-времени. Соответствующее решение волнового уравнения ищется в виде разложения (6) по степеням $1/r$: при вычислении коэффициентов $a_{slm}(u)$ этого разложения ограничиваются лишь членами первого порядка относительно гравитационной постоянной. В нулевом приближении (плоское пространство-время) получается профиль сходящейся к центру волны в виде разложения по отрицательным степеням величины $v^* = u + 2r$. Коэффициенты этого разложения пропорциональны начальным значениям функций $a_{slm}(u)$ $(s \geqslant l+2)$, причем сохраняющаяся величина типа Ньюмэна—Пенроуза $a_{l+2,lm}$ определяет лишь коэффициент главного члена. Начиная с первого приближения вследствие взаимного отражения сходящиеся к центру и расходящиеся из центра волны связаны друг с другом. Вычисляются поправки, описывающие отражение первоначальной расходящейся из центра волны (см. (14), (15), (21)). Эти поправки после прохождения заднего фронта первоначальной волны при фиксированном r быстро убывают со временем, и поле асимптотически переходит в статическое конечное состояние.

1. Введение

Интегрирование уравнений Эйнштейна с учетом гравитационного излучения приводит даже в наиболее удобных координатах — в координатах Бонди [1] — к некоторым физически трудно интерпретируемым результатам. Сюда относится, в частности, возникновение во втором приближении так наз. хвостов излучения [2–5] — длительного последействия, имеющего место в любой точке пространства после прохождения заднего фронта волны первого приближения. Это явление связано не только с нелинейностью уравнений Эйнштейна — оно характерно и для решений обычного скалярного волнового уравнения и уравнений Максвелла, если метрика пространства-времени отличается от псевдоевклидовой. Методически целесообразнее начать изучение хвостов излучения именно на примерах этих более простых уравнений, физическое содержание которых изучено гораздо лучше, чем эйнштейновских уравнений, и при которых, кроме того, хвосты появляются не во втором, а уже в первом приближении.

В данной работе рассмотрим наиболее простую проблему — задачу о распространении радиального скалярного излучения в заданном шварцшильдовском гравитационном поле. Такая постановка проблемы разумна, если скалярное поле настолько слабо, что оно существенно не искажает метрику пространства-времени. Конечно, в общем случае надо учесть воздействие скалярного поля на метрику, т. е. решить совместно скалярное и эйнштейновские уравнения.

Итак, в данной работе метрика задана в следующем виде (метрика Шварцшильда в координатах Бонди [1]):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) du^2 + 2dr\, du - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{1}$$

где α — гравитационный радиус, а временная координата Бонди u связана с обычным шварцшильдовским временем t соотношением

$$u = t - [r + \alpha \ln (r - \alpha)]. \tag{2}$$

При метрике (1) скалярное волновое уравнение

$$\Box\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \Phi_{,\beta})_{,\alpha} = 0$$

принимает следующий вид:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) - \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) -$$

$$- \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} F_{lm}(u, r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \tag{4}$$

где $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ — обычные сферические функции. В формуле (4) каждое слагаемое

$$\Phi_{lm} = F_{lm}(u, r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{4'}$$

описывает поле одного простого мультиполя, а функции $F_{lm}(u, r)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_{lm}}{\partial u} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rF_{lm}) + \frac{l(l+1)}{r^2} F_{lm} + \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_{lm}}{\partial r} \right) = 0. \tag{5}$$

Отметим, что прямые $u = \mathrm{const}$ являются характеристиками гиперболического уравнения (5), а другое семейство характеристик определяется соотношением

$$v \equiv u + 2[r + \alpha \ln (r - \alpha)] = \mathrm{const}. \tag{2'}$$

Функцию $F_{lm}(u, r)$ будем искать в виде разложения по степеням $1/r$

$$F_{lm} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_{slm}(u)}{r^s}. \tag{6}$$

Для коэффициентов разложения $a_{slm}(u)$ в формуле (6) получим следующие рекуррентные уравнения:

$$2s\dot{a}_{s+1,lm} = (l + s)(l + 1 - s)\, a_{slm} + \alpha (s - 1)^2 a_{s-1,lm}, \tag{7}$$

где $\dot{a} = \dfrac{da}{du}$.

При $s = 0$ уравнение (7) превращается в тождество (так как $a_{0lm} = a_{-1lm} = 0$) независимо от выбора функции a_{1lm}, т. е. эта функция, являющаяся аналогом функции информации Бонди и определяющая поведение поля в волновой зоне, совершенно произвольна. Решение системы (7), а тем самым и каждое решение типа (4′) скалярного волнового уравнения, определяется однозначно функцией информации $a_{1lm}(u)$ и начальными значениями всех остальных коэффициентов $a_{slm}(u)$ $(s = 2, 3, \ldots)$ [6].

В настоящей работе будем решать систему (7) приближенно, рассматривая α как малый параметр и ограничиваясь лишь членами первого порядка относительно α. Прежде всего, рассмотрим коротко во втором параграфе нулевое приближение — скалярное уравнение в плоском пространстве-времени. С одной стороны, это подготовительная работа к третьему и четвертому параграфу, где приводится и обсуждается основной результат наших вычислений — решение, описывающее в первом приближении скалярное поле излучения произвольной мультипольной структуры. С другой стороны, такой анализ имеет и самостоятельное значение, так как он позволяет лучше понять роль сохраняющихся величин типа Ньюмэна—Пенроуза.

§ 2. Скалярное уравнение в плоском пространстве-времени

Решения скалярного волнового уравнения в плоском пространстве-времени (т. е. уравнения (3) при $\alpha = 0$) хорошо известны. Но ввиду того, что выбранная нами координатная система особо выделяет расходящуюся от точки $r = 0$ сферическую волну, которую мы условно называем прямой волной, возникают при рассмотрении обратной или сходящейся в точку $r = 0$ сферической волны некоторые осложнения, которые могут привести к недоразумениям. Поэтому целесообразно коротко обсудить и этот случай.

Прежде всего отметим, что при $\alpha = 0$ система (7) фактически распадается на две независимые подсистемы. Первую подсистему образуют l первых уравнений; вместе с функцией информации $a_{1lm}(u)$ и начальными значениями $a_{slm}(u_0)$ $(2 \leqslant s \leqslant l+1)$ они определяют однозначно функции $a_{slm}(u)$ $(1 \leqslant s \leqslant l+1)$. Это же решение определяется однозначно и заданием закона изменения мультипольной структуры $a_{l+1,lm}(u)$. При этом прибавление к заданной функции $a_{l+1,lm}(u)$ полинома $(l-1)$-й степени $p_{l-1}(u)$ не влияет на поведение поля в волновой зоне. Этот полином определяется однозначно именно начальными значениями $a_{slm}(u_0)$ $(2 \leqslant s \leqslant l+1)$ и описывает некоторое безызлучательное изменение мультипольной структуры. Аналогичные решения уравнений Максвелла и Эйнштейна исследовал А. Папапетру [7, 8]. Оставшаяся часть решения первой подсистемы, определяемая функцией информации и нулевыми начальными значениями $a_{slm}(u_0)$ $(2 \leqslant s \leqslant l+1)$, описывает уже истинную прямую волну. Вторую подсистему образуют все остальные уравнения; вместе с соответствующими начальными значениями они определяют обратную волну. Такое раздвоение системы (7) происходит потому, что при $s = l+1$ нормальная рекуррентная цепь уравнений, выражающих каждую функцию $a_{s+1,lm}$ через a_{slm}, обрывается. Эти уравнения

$$2(l+1)\dot{a}_{l+2,lm} = 0 \tag{8}$$

представляют самостоятельный интерес, так как приводят к сохраняющимся величинам типа Ньюмэна—Пенроуза [9, 10]

$$a_{l+2,lm} = \text{const}. \qquad (8')$$

Физический смысл этих сохраняющихся величин, как и аналогичных величин в присутствии гравитационного поля, остается довольно неясным. Конечно, все $a_{l+2,lm}$ аналогично остальным начальным значениям $a_{slm}(u_0)$ $(s \geqslant l+3)$ независимы от функции информации $a_{1lm}(u)$. При этом каждая отличная от нуля величина $a_{l+2,lm}$ порождает бесконечно много отличных от нуля коэффициентов $a_{slm}(u)$ $(s \geqslant l+3)$ разложения (6) и каждая из них является полиномом от u степени $s-(l+2)$. Как показано в [11], определяемое такими коэффициентами решение (6) можно интерпретировать как обратную сферическую волну, мультипольная структура которой определена индексами l и m. Проведенный в [11] анализ является неполным, так как там рассматривается лишь частный случай, когда от нуля отличается только $a_{l+2,lm}$, а начальные значения всех остальных a_{slm} $(s \geqslant l+3)$ равны нулю. На основе этого обычно считается, что обратная волна возникает именно благодаря ненулевому значению сохраняющейся величины $a_{l+2,lm}$. Действительно, каждая отличная от нуля $a_{l+2,lm}$ порождает обратную волну соответствующей мультипольной структуры. Но обратная волна такой же мультипольной структуры возникает и тогда, когда $a_{l+2,lm} = 0$, а хотя бы одно из начальных значений коэффициентов $a_{slm}(s \geqslant l+3)$ отличается от нуля (см. приложение).

Таким образом, отличие от нуля сохраняющейся величины $a_{l+2,lm}$ в отсутствии гравитационного поля является достаточным, а не необходимым условием появления в решениях волнового уравнения обратных волн. Фактически $a_{l+2,lm}$ является лишь одним из коэффициентов разложения функции, определяющей профиль обратной волны, в ряд по обратным степеням величины $v^* = t + r = u + 2r$ (см. (A10)). Сохраняющиеся величины появляются потому, что координатная система Бонди особо выделяет прямые волны, но при этом является очень неудобной для описания обратных волн. Если вместо u ввести координату v, определяемую формулой (2′), то можно придти к симметричному формализму, удобному для описания обратных волн. В таком формализме появляются новые сохраняющиеся величины, связанные уже с прямыми волнами; численные значения этих величин, конечно, отличаются от значений $a_{l+2,lm}$.

§ 3. Скалярное уравнение в поле Шварцшильда (первое приближение)

В поле Шварцшильда $(\alpha \neq 0)$ система (7) уже не раздваивается, так как каждая a_{slm} входит с ненулевыми коэффициентами уже по меньшей мере в два уравнения. Поэтому и коэффициенты $a_{l+2,lm}$ не сохраняются, за исключением лишь a_{200}. На эту сохраняющуюся величину обратили внимание уже Е. Т. Ньюмэн и Р. Пенроуз [9, 10]. С физической точки зрения такая полная связь всех уравнений (7) означает, что в гравитационном поле обратные и прямые волны взаимосвязаны, т. е. распространение возмущения сопровождается непрерывным отражением.

Среди разных решений волнового уравнения особый интерес представляет случай, когда функция информации отличается от нуля только в некотором конечном интервале $u_0 \leqslant u \leqslant u_1$, т. е. в волновой зоне имеется в нулевом приближении лишь локализованная во времени прямая волна. Подходящим выбором начальных значений $a_{slm}(u_0)$ $(2 \leqslant s \leqslant l)$ можно добиться того, что и мультипольный момент поля $a_{l+1,lm}$ будет иметь аналогичную структуру, т. е. функция $a_{l+1,lm}$ будет постоянной до момента времени u_0 и после момента u_1, а меняться будет только в конечном интервале от u_0 до u_1. Тогда интегрирование остальных уравнений системы (7) $s \geqslant l+1$ приведет для $u > u_1$ к таким же полиномам относительно u, какие в отсутствии гравитационного поля появились от нулевых начальных значений $a_{slm}(u_0)$ $(s \geqslant l+2)$. Следовательно, подходящим выбором начальных значений можно полностью скомпенсировать последействие, связанное с локализованным во времени режимом изменения мультипольной структуры.

Теперь приступим к подробному рассмотрению поправок первого порядка к решениям волнового уравнения, описывающим поле излучения заданной мультипольной структуры. В дальнейшем для упрощения записи мы опускаем индекс m как совершенно несущественный в наших вычислениях. Предположим, что до момента u_0 поле — статическое. Нестатический режим длится (в нулевом приближении) до момента u_1, после которого мультипольный момент $a_{l+1,l}$ снова принимает постоянное значение

$$a_{l+1,l}(u) = \begin{cases} A_l = \text{const}, & u \leqslant u_0; \\ f(u) = A_l + \Delta a_{l+1,l}(u), & u_0 < u < u_1; \\ A_l^* = \text{const}, & u_1 < u. \end{cases} \tag{9}$$

Из общего статического решения системы (7)

$$\begin{aligned} &\overset{(0)}{a}_{sl} = 0 \quad (s \leqslant l), \\ &\overset{(0)}{a}_{l+1,l} = A_l, \\ &\overset{(0)}{a}_{l+1+k,l} = \frac{(2l+1)!}{(2l+k+1)!k!}\left(\frac{(l+k)!}{l!}\right)^2 \alpha^k A_l \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{10}$$

видно, что с точностью до членов первого порядка от нуля отличаются только начальные значения

$$a_{l+1,l}(u_0) = A_l$$

и

$$a_{l+2,l}(u_0) = \underset{1}{a}_{l+2,l}(u_0) = \alpha\frac{l+1}{2}A_l. \tag{11}$$

В нулевом приближении существует только прямая волна, т. е. все $\underset{0}{a}_{sl}$ $(1 \leqslant s \leqslant l)$ можно выразить через момент $a_{l+1,l}$, заданный формулой (9) (см. (A1)), а все $\underset{0}{a}_{sl}$ $(s \geqslant l+2)$ равны нулю. Для поправок первого порядка имеем рекуррентную систему

$$2s\underset{1}{\dot{a}}_{s+1,l} = (l+s)(l+1-s)\underset{1}{a}_{sl} + \alpha(s-1)^2\underset{0}{a}_{s-1,l}, \tag{12}$$

при этом, так как функцию $a_{l+1,l}$ рассматриваем как заданную, можем предположить, что

$$\underset{1}{a}_{l+1,l} = 0. \tag{12'}$$

Если $s = l$, то из уравнений (12) и (12′) находим

$$\underset{1}{a}_{ll} = -\alpha\frac{(l-1)^2}{2l}\underset{0}{a}_{l-1,l}. \tag{13}$$

Исходя из найденной поправки $\underset{1}{a}_{ll}$, можно последовательно определить и все остальные $\underset{1}{a}_{sl}$ $(s \leqslant l)$

$$\underset{1}{a}_{sl} = -\alpha \sum_{k=0}^{l-s} \frac{2^k (s+k-1)!\,(l+s-1)!\,(l-s-k)!}{(s-1)!\,(l+s+k)!\,(l-s+1)!} \frac{d^k}{du^k} \underset{0}{a}_{s+k-1,l}$$

или, учитывая формулу (A1), окончательно

$$\underset{1}{a}_{sl} = -\alpha \frac{2^{l+2-s}\, l!\,(l+s-1)!}{(s-1)!\,(2l)!\,(l-s+1)!} \frac{d^{l+2-s}}{du^{l+2-s}} a_{l+1,l} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{l-s} \frac{(l+s+k-2)!\,(l-s-k)!\,(s+k-1)^3}{(l+s+k)!\,(l-s-k+2)!} \quad (s \leqslant l). \tag{14}$$

Рассмотрим теперь уравнения (12) при $s = l+1,\ l+2$. С учетом (A1) первое из них (при $s = l+1$) принимает вид

$$\dot{\underset{1}{a}}_{l+2,l} = \frac{\alpha l^2}{2(l+1)} \dot{a}_{l+1,l}$$

или, учитывая начальное условие (11),

$$\underset{1}{a}_{l+2,l} = \frac{\alpha l^2}{2(l+1)} \Delta a_{l+1,l} + \alpha \frac{l+1}{2} A_l. \tag{15}$$

Принимая во внимание полученный результат, можно второе уравнение (при $s = l+2$) выписать в виде

$$\dot{\underset{1}{a}}_{l+3,l} = \alpha \frac{2l+1}{2(l+2)} \Delta a_{l+1,l}$$

или, так как начальное значение равно нулю,

$$\underset{1}{a}_{l+3,l} = \alpha \frac{2l+1}{2(l+2)} \int_{u_0}^{u} \Delta a_{l+1,l}(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

Все остальные уравнения (12) образуют уже однородную рекуррентную систему, при помощи которой все $\underset{1}{a}_{sl}$ $(s \geqslant l+4)$ можно выразить через $\underset{1}{a}_{l+3,l}$. С учетом нулевых начальных условий находим

$$\underset{1}{a}_{l+3+k,l} = \alpha \frac{(-1)^k (2l+k+2)!\, l!\, (k+1)!}{2^{k+2} (l+k+2)!\, (2l)!} \int_{u_0}^{u} d\tau_k \int_{u_0}^{\tau_k} d\tau_{k-1} \ldots \int_{u_0}^{\tau_1} \Delta a_{l+1}(\tau)\, d\tau. \tag{17}$$

Формулу (17) можно переписать более компактно, если учесть, что

$$I_{k+1} = \int_{u_0}^{u} d\tau_k \int_{u_0}^{\tau_k} d\tau_{k-1} \ldots \int_{u_0}^{\tau_1} \Delta a_{l+1,l}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{k!} \int_{u_0}^{u} \Delta a_{l+1,l}(\tau)\, (u-\tau)^k d\tau. \tag{18}$$

Учитывая еще соотношение (A6), можно, наконец, легко просуммировать бесконечный ряд типа (6), коэффициенты которого определяются формулой (17),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underset{1}{a}_{l+3+k,l}}{r^{l+3+k}} = \frac{\alpha l!}{4(2l)!\, r^{l+3}} \sum_{s=0}^{l} \frac{(2l-s)!}{(l-s)!\, s!} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1+s)!}{k!} \int_{u_0}^{u} \Delta a_{l+1,l}(\tau) \left(\frac{u-\tau}{2r}\right)^k d\tau =$$

$$= \frac{\alpha l!}{4(2l)!\, r^{l+3}} \sum_{s=0}^{l} \frac{(2l-s)!\,(s+1)}{(l-s)!} \int_{u_0}^{u} \frac{\Delta a_{l+1,l}(\tau)\, d\tau}{\left(1+\dfrac{u-\tau}{2r}\right)^{s+2}}. \tag{19}$$

Если ввести волновой аргумент обратной волны *

$$v^* = 2r + u \tag{20}$$

и учесть соотношение (А7), то получим окончательно

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{1}{a}_{l+3+k,l}}{r^{l+3+k}} = \alpha \frac{l!}{(2l)!} \sum_{s=0}^{l} \frac{(-2)^s (2l-s)!}{(l-s)!\, s!\, r^{l+1-s}} \frac{d^s}{dv^{*s}} \int_{u_0}^{u} \frac{\Delta a_{l+1,l}(\tau)\, d\tau}{(v^*-\tau)^2}. \tag{21}$$

§ 4. Обсуждение результатов

Полное решение уравнения (5) с точностью до членов первого порядка состоит из слагаемых трех типов: 1) прямая волна нулевого приближения (А7), 2) поправки к прямой волне

$$\sum_{s=1}^{l} \frac{\overset{1}{a}_{sl}}{r^s} + \frac{\overset{1}{a}_{l+2,l}}{r^{l+2}}$$

(см. (14), (15)) и 3) обратная волна (21), индуцированная первоначальной прямой волной. Несмотря на то, что наши вычисления носят немного формальный характер (операции с рядами корректны лишь при $\left|\dfrac{u-\tau}{2r}\right| \leqslant \beta < 1$), составленная таким образом функция F_{lm} удовлетворяет в первом приближении дифференциальному уравнению (5) при довольно общих предположениях, обеспечивающих лишь дифференцируемость решения F_{lm} и существование интеграла в формуле (21). Поэтому ряд авторов [2–4] при рассмотрении гравитационного излучения предпочитает искать решение соответствующих уравнений не в виде бесконечных сумм типа (6), а в виде выражений, по своей структуре аналогичных найденным здесь функциям F_{lm}. Эта аналогия становится полной, если заметить, что

$$\frac{\alpha l!}{4(2l)!\, r^{l+3}} \sum_{s=0}^{l} \frac{(2l-s)!\,(s+1)}{(l-s)!} \int_{-\infty}^{u} \frac{A_l\, d\tau}{\left(1+\dfrac{u-\tau}{2r}\right)^{s+2}} =$$

$$= \frac{\alpha A_l}{2r^{l+2}} \sum_{s=0}^{l} \frac{(2l-s)!\, l!}{(l-s)!\,(2l)!} = \frac{\alpha A_l}{r^{l+2}} \frac{2l+1}{2(l+1)}$$

и переписать формулы (15) и (19) в следующем виде:

$$\frac{\overset{1}{a}_{l+2,l}}{r^{l+2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{1}{a}_{l+3+k,l}}{r^{l+3+k}} =$$

$$= \frac{\alpha l^2 a_{l+1,l}}{2(l+1)\, r^{l+2}} + \frac{\alpha l!}{(2l)!} \sum_{s=0}^{l} \frac{2^s (2l-s)!\,(s+1)}{(l-s)!\, r^{l+1-s}} \int_{-\infty}^{u} \frac{a_{l+1,l}(\tau)\, d\tau}{(2r+u-\tau)^{s+2}}. \tag{22}$$

---

* Связь между истинными аргументами прямых и обратных сферических волн определяется соотношением (2′), но это привело бы в данном случае уже к поправкам второго порядка, так как $f(v) = f(v^*) + 2\alpha f'(v^*) \ln r$.

Обратная волна (21) описывает упомянутый во введении хвост излучения. Она определяется полностью «мультипольным моментом обратной волны»

$$b_{l+1,l}(v^*;u) = \alpha \int_{u_0}^{u} \frac{\Delta a_{l+1,l}(\tau)\,d\tau}{(v^*-\tau)^2}. \tag{23}$$

Если прямая волна уже прошла, т. е. $u > u_1$, то

$$b_{l+1,l}(v^*) = \alpha \int_{u_0}^{u_1} \frac{\Delta a_{l+1,l}(\tau)\,d\tau}{(v^*-\tau)^2} - \frac{\alpha\Delta A_l}{v^*-u_1} + \frac{\alpha\Delta A_l}{v^*-u}, \tag{24}$$

где

$$\Delta A_l = \Delta a_{l+1,l}(u_1) = A_l^* - A_l. \tag{24'}$$

Последний член в формуле (24) дает некоторую статическую поправку (см. (20)), пропорциональную $1/r^{l+2}$. Первые два члена показывают, что нестатическая часть последействия (истинная обратная волна) убывает с ростом волнового аргумента v^*.

Итак, последействие уменьшается со временем, если наблюдатель покоится (r фиксировано) или удаляется вдоль характеристик $u = \mathrm{const} > u_1$. Последнее понятно, так как с ростом r метрика Шварцшильда постепенно переходит в метрику плоского пространства-времени, где эффект отражения отсутствует.

Поучительно рассмотреть подробнее также простейший частный случай $l = 0$. Тогда мы имеем

$$\Phi_0 = \begin{cases} \dfrac{A_0}{r} + \alpha\dfrac{A_0}{2r^2}, & u \leqslant u_0; \\[2ex] \dfrac{a_{10}(u)}{r} + \alpha\left[\dfrac{A_0}{2r^2} + \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_{u_0}^{u}\dfrac{\Delta a_{10}(\tau)\,d\tau}{(v^*-\tau)^2}\right], & u_0 < u < u_1; \\[2ex] \dfrac{A_0^*}{r} + \alpha\left\{\dfrac{A_0}{2r^2} + \dfrac{1}{r}\left[\displaystyle\int_{u_0}^{u_1}\dfrac{\Delta a_{10}(\tau)\,d\tau}{(v^*-\tau)^2} - \dfrac{\Delta A_0}{v^*-u_1} + \dfrac{\Delta A_0}{v^*-u}\right]\right\} = & \\[2ex] = \dfrac{A_0^*}{r} + \alpha\left\{\dfrac{A_0^*}{2r^2} + \dfrac{1}{r}\left[\displaystyle\int_{u_0}^{u_1}\dfrac{\Delta a_{10}(\tau)\,d\tau}{(v^*-\tau)^2} - \dfrac{\Delta A_0}{v^*-u_1}\right]\right\}, & u_1 < u. \end{cases} \tag{25}$$

Видно, что после прохождения прямой волны поле переходит постепенно ($v^* \to \infty$) в статическое конечное состояние

$$\Phi_0 = \frac{A_0}{r} + \alpha\frac{A_0^*}{2r^2} \tag{25'}$$

так что в конечном счете меняется и коэффициент при $1/r^2$. С другой стороны, по закону сохранения Ньюмэна—Пенроуза, коэффициент a_{20} должен быть строго постоянным. Однако противоречие здесь только кажущееся **. Закон сохранения Ньюмэна—Пенроуза связан с разложением (6) при соблюдении условия разложимости. Следовательно, коэффициент при $1/r^2$ имеет одно и то же значение на любых характеристи-

** На это обратил наше внимание В. Унт.

ках $u = \text{const}$ при $r > \frac{u-u_0}{2}$, в частности при $u \to \infty$ также и $r \to \infty$. Как отмечено, решение (25) имеет смысл уже вне области сходимости разложения (6), поэтому в нашем выводе соотношения (25′) мы могли считать, что при $v^* \to \infty$ (или $u \to \infty$) r остается ограниченным. Отсюда ясно, что закон Ньюмэна—Пенроуза, область применения которого определяется фактически условием разложимости функции F_{lm} в ряд (6), никак не связан с истинным конечным состоянием скалярного поля.

Приведенный анализ, как и результаты, полученные во втором параграфе, по нашему мнению, довольно убедительно указывают на то, что нет смысла рассматривать законы сохранения Ньюмэна—Пенроуза как некоторые самостоятельные физические законы типа правил отбора, они скорее являются продуктами математического подхода, выдвигающего на привилегированное место излучение в виде прямых волн.

С помощью формул (17) и (18) можно легко найти ненулевые начальные значения $a_{sl}(u_0)$ $(s \geqslant l+2)$, необходимые в первом приближении для компенсации последействия, вызванного изменением мультипольной структуры. Тем самым конечное состояние поля становится статическим, но зато начальное состояние, не соответствующее теперь условиям (10), становится нестатическим.

Приложение

Решение первых l уравнений системы (7) для плоского пространства-времени ($\alpha = 0$) удобно выразить через мультипольный момент

$$a_{sl}(u) = \frac{2^{l+1-s} l!\,(l+s-1)!}{(s-1)!\,(2l)!\,(l-s+1)!} \frac{d^{l+1-s}}{du^{l+1-s}} a_{l+1,l}(u) \quad (s = 1, 2, \ldots, l+1). \tag{A1}$$

Соответствующее решение типа (6)

$$F_l(u,r) = \sum_{s=1}^{l+1} \frac{a_{sl}(u)}{r^s} = \sum_{k=0}^{l} \frac{2^k l!\,(2l-k)!}{(2l)!\,(l-k)!\,k!\,r^{l+1-k}} \frac{d^k a_{l+1,l}(u)}{du^k} \tag{A2}$$

охватывает как истинную прямую волну, так и поле, связанное с безызлучательным изменением мультипольного момента.

Остальные уравнения системы (7) при начальных условиях ***

$$\begin{aligned} &a_{l+p,l}(u_0) = A_{l+p} \neq 0 \quad (p \geqslant 2), \\ &a_{sl}(u_0) = 0 \quad (\text{при всех } s \geqslant l+2 \text{ и } s \neq l+p) \end{aligned} \tag{A3}$$

тоже легко интегрируются:

$$a_{l+p+k,l} = \\ = \frac{(-1)^k (2l+p+k-1)!\,(l+p-1)!\,(p+k-2)!}{2^k (l+p+k-1)!\,(2l+p-1)!\,(p-2)!\,k!} (u-u_0)^k A_{l+p,l}. \tag{A4}$$

Соответствующий ряд для частного случая $p = 2$ просуммирован в работе [11]. При этом существенную роль играет соотношение

$$\frac{(2l+k+1)!}{(l+k+1)!} = B_0 + \sum_{s=1}^{l} \frac{B_s}{s!} (k+1)(k+2)\ldots(k+s), \tag{A5}$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_l$ — коэффициенты, не зависящие от k. Если учесть, что

*** Индекс p рассматривается сначала как фиксированный.

$$B_s = \frac{(2l-s)!}{(l-s)!}, \tag{A5'}$$

то легко получить аналогичные (A5) соотношения

$$\frac{(2l+k+p-1)!}{(l+k+p-1)!} = \sum_{s=0}^{l} \frac{(2l-s)!}{(l-s)!s!} \frac{(k+p-2+s)!}{(k+p-s)!}, \tag{A6}$$

при помощи которых можно просуммировать ряд (6), определяемый коэффициентами (A4)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{l+p+k,l}}{r^{l+p+k}} =$$

$$= \frac{A_{l+p,l}(l+p-1)!}{(p-2)!(2l+p-1)!r^{l+p}} \sum_{s=0}^{l} \frac{(2l-s)!}{s!(l-s)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+p+s-2)!}{k!} \left(\frac{u-u_0}{2r}\right)^k =$$

$$= \frac{A_{l+p,l}(l+p-1)!}{(p-2)!(2l+p-1)!r^{l+p}} \sum_{s=0}^{l} \frac{(2l-s)!(p+s-2)!}{s!(l-s)!} \left(1+\frac{u-u_0}{2r}\right)^{-(p+s-1)}.$$

Учитывая обозначение (20) и заметив, что

$$(v^*-u_0)^{-(p+s-1)} = (-1)^s \frac{(p-2)!}{(p+s-2)!} \frac{d^s}{dv^{*s}} (v^*-u_0)^{-(p-1)}, \tag{A7}$$

находим окончательно

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{l+p+k,l}}{r^{l+p+k}} =$$

$$= \frac{2^{p-1}(l+p-1)!A_{l+p,l}}{(2l+p-1)!} \sum_{s=0}^{l} \frac{(-2)^s(2l-s)!}{s!(l-s)!r^{l+1-s}} \frac{d^s}{dv^{*s}} (v^*-u_0)^{-(p-1)}. \tag{A8}$$

Ввиду линейности уравнения (5) и системы (7) решение, определяемое общими начальными условиями

$$a_{sl}(u_0) = A_{sl} \qquad (s \geqslant l+2), \tag{A9}$$

можно представить как сумму частных решений типа (A7). Суммировать надо по индексу p от 2 до ∞, предполагая при этом, что соответствующий бесконечный ряд сходится равномерно при $|v^*-u_0| \geqslant R_0$. Отметим, наконец, что полученное решение $F_l(v^*, r)$ можно выразить через производные от функции

$$b_{l+1,l}(v^*) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^p(l+p)!(2l)!A_{l+p+1}}{(2l+p)!l!(v^*-u_0)^p}, \tag{A10}$$

определяющей закон изменения мультипольного момента, связанного с обратной волной, следующим образом:

$$F_l(v^*, r) = \sum_{s=0}^{l} \frac{(-2)^s(2l-s)!l!}{s!(l-s)!(2l)!r^{l+1-s}} \frac{d^s}{dv^{*s}} b_{l+1,l}(v^*). \tag{A11}$$

В заключение автор выражает благодарность В. Унту за ценные обсуждения результатов работы, а также Р. Манкину за проведение некоторых вычислений, вошедших в третий параграф статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bondi H., Van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K., Proc. Roy. Soc., **A 269**, 21 (1962).
2. Bonnor W. B., Rotenberg M. A., Proc. Roy. Soc., **A 289**, 247 (1966).
3. Couch W. E., Torrence R. J., Janis A. I., Newman E. T., J. Math. Phys., **9**, 484 (1969).
4. Hunter A. J., Rotenberg M. A., J. Phys., **A 2**, 34 (1969).
5. Hallidy W. H., Janis A. I., J. Math. Phys., **11**, 578 (1970).
6. Friedlander F. G., Proc. Roy. Soc., **A 269**, 53 (1962); **A 279**, 386 (1964); **A 299**, 264 (1967).
7. Papapetrou A., J. Math. Phys., **6**, 1405 (1965).
8. Papapetrou A., Ann. Inst. H. Poincaré, **A 11**, 57 (1969).
9. Newman E. T., Penrose R., Phys. Rev. Lett., **15**, 231 (1965).
10. Newman E. T., Penrose R., Proc. Roy. Soc., **A 305**, 175 (1968).
11. Bažanski S. L., Wiss. Z. F.-Schiller-Univ. Jena, **17**, 205 (1968).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
19/XI 1970

I. PIIR

SKALAARNE LAINEVÕRRAND SCHWARZSCHILDI GRAVITATSIOONIVÄLJAS

Uuriti meelevaldse multipoolstruktuuriga keralainete levimist Schwarzschildi meetrikaga aegruumis. Kasutatakse nn. Bondi koordinaatsüsteemi ning lainevõrrandi vastavat lahendit otsitakse rittaarendusena $1/r$ astmete järgi (6). Rea (6) kordajate leidmisel piirdutakse vaid gravitatsioonikonstandi suhtes I järku liikmetega. Tasase aegruumi korral saadakse sissetuleva multipoolkiirguse laineprofiil rittaarendusena suuruse $v^* = u + 2r$ negatiivsete astmete järgi. Näidatakse, et selle rea kordajad ei sõltu informatsioonifunktsiooni $a_{llm}(u)$ valikust ning on võrdelised funktsioonide $a_{slm}(u)$ $(s \geqslant l+2)$ algväärtustega, kusjuures Newmani-Penrose'i tüüpi jääv suurus $a_{l+2,lm}$ määrab vaid rea pealiikme kordaja. Kõveras aegruumis ei saa väljaminevaid ja sissetulevaid laineid juba I lähenduses vaadelda teineteisest sõltumatutena, sest levikuprotsessis peegeldub iga laine osaliselt tagasi. Leitakse esialgse väljamineva laine tagasipeegeldumist kirjeldavad parandusliikmed ((14) (15) ja (21)). Näidatakse, et pärast esialgse laine tagumise frondi läbimist esinev peegeldumisega seotud järelmõju kahaneb kiiresti sissetuleva laine argumendi v^* kasvades ning skalaarne väli tervikuna läheb asümptootiliselt üle staatilisse lõppolekusse, seejuures ei avalda Newmani-Penrose'i tüüpi jäävusseadus staatilisele lõppolekule mingit selekteerivat toimet.

I. PIIR

SCALAR WAVE EQUATION IN SCHWARZSCHILD'S GRAVITATIONAL FIELD

The propagation of spherical waves with any arbitrary multipole structure is studied in Schwarzschild's spacetime. Bondi's coordinate system together with the method of expansion of solutions in negative powers of r is used. In flat spacetime approximation the profile of incoming multipole waves has been found as an expansion in negative powers of $v^* = u + 2r$ (A 10). The coefficients of this expansion are independent of the choice of information function $a_{llm}(u)$ and are proportional to the initial values of $a_{slm}(u)$ $(s \geqslant l+2)$. In curved spacetime the outcoming and incoming waves are not independent because of the partial reflection of any waves. The first approximation terms describing the reflection of the primary outcoming wave are calculated ((14) (15) and (21)). It is shown that the primary sandwich wave causes a secondary incoming radiation that decreases with the increasing of the wave argument v^* (20), i. e. after passing of the primary wave the scalar field overgoes asymptotically into a static final state. In connection with this result it should be noted that the conservation law of Newman and Penrose ($a_{200} = \text{const}$) has no selectional effect on the asymptotical final state.