EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.20

М. КУТСЕР

ВЛИЯНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ НА ИНТЕНСИВНОСТИ ФРОНТОВЫХ РАЗРЫВОВ УПРУГИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДЕННЫХ ВОЛНОЙ ДАВЛЕНИЯ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

M. KUTSER. AKUSTILISE KESKKONNA MOJU RÕHULAINE POOLT PÖÖRDKOORIKUS ESILEKUTSUTUD ELASTSETE LAINETE FRONTIDE INTENSIIVSUSELE

M. KUTSER. THE INFLUENCE OF AN ACOUSTIC MEDIUM ON THE INTENSITY OF THE FRONTS OF ELASTIC WAVES CAUSED BY A PRESSURE WAVE IN THE SHELLS OF REVOLUTION

В [1, 2] в рамках теории типа Тимошенко исследованы разрывы на фронтах одномерных волн, возбужденных в оболочках вращения волной давления, набегающей со скоростью c_q, которая в начале атаки превышает скорость распространения упругих волн и с течением времени уменьшается. При таком воздействии в моменты времени, когда $c_q = c_a$ и $c_q = c_b$, соответственно возникают упругие волны «a» и «b», распространяющиеся со скоростями c_a и c_b (здесь c_a и c_b — скорости распространения волн по теории типа Тимошенко). В [1, 2] интенсивности фронтов волн «a» и «b» были изучены без учета среды. В данном сообщении на основе уточненной гипотезы плоского отражения, предложенной в [3], результаты работы [2] обобщены на случай приближенного учета влияния окружающей акустической среды. Показано, что в результате этого амплитуды разрывов на первом фронте не изменяются, а на втором фронте затухают по экспоненциальному закону.

Пусть на срединной поверхности оболочки толщиной $2h$ выбрана система координат ξ, η с параметрами Ляме $A = h$, $B = B(\xi)$ и пусть ζ — безразмерная координата по нормали к срединной поверхности. Введем обозначения: R_1 и R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности, $a_j = h/R_j$, t — время, ν — коэффициент Пуассона, k_T^2 — коэффициент сдвига, $k^2 = (1-\nu)/2$, $\tau = tkc_a/h$ — безразмерное время. Рассмотрим зависящие от ξ, τ процессы деформации оболочки. Пусть u, w — безразмерные (деленные на h) перемещения в направлениях ξ и ζ; ψ — угол поворота нормали; $q_0(\xi,\tau)$ и $\tilde{q}_1(\xi,\tau)$ — соответственно безразмерное давление, не учитывающее деформацию оболочки, и безразмерное давление, вызванное деформацией оболочки; $\tilde{\varphi}(\xi,\zeta;\tau)$ — потенциал скорости, соответствующий $\tilde{q}_1$; c_0 — скорость звука в среде; ϱ_0, ϱ_k — плотности среды и материала оболочки; введем еще обозначения:

$$K = k^2k_T^2, \quad c = c_a/c_0, \quad \varrho = \varrho_0/\varrho_k, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}(\ldots) = (\ldots)', \quad \frac{\partial}{\partial\tau}(\ldots) = (\ldots)^{\cdot}. \tag{1}$$

В случае наличия среды, совместно с уравнениями оболочки приходится интегрировать волновое уравнение среды с учетом условий

$$\tilde{q}_1 = -\varrho\tilde{\varphi}^{\cdot}(\xi, 0; \tau), \quad \frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{\varphi}(\xi, 0; \tau) = w^{\cdot}. \tag{2}$$

Учитывая гипотезы работы [3], упрощенное волновое уравнение среды принимаем в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\tilde{\varphi} + 2a\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{\varphi} = c^2\ddot{\tilde{\varphi}}, \qquad a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2). \tag{3}$$

Обозначим преобразование Лапласа от $u(\xi,\tau)$, $\psi(\xi,\tau)$, ... соответственно через $U(\xi,s)$, $\Psi(\xi,s)$, ... и введем новые функции:

$$V_1 = U\sqrt{B}, \quad V_2 = \Psi\sqrt{B}, \quad V_3 = W\sqrt{B}, \quad Q_0 = \tilde{Q}_0\sqrt{B},$$
$$Q_1 = \tilde{Q}_1\sqrt{B}, \quad \Phi = \tilde{\Phi}\sqrt{B}. \tag{4}$$

В [2] предложен приближенный метод вычисления интенсивностей фронтовых разрывов, основывающийся на построении асимптотического при $s\to\infty$ решения преобразованной по Лапласу системы уравнений оболочки. Обобщение этого метода на случай учета влияния среды с точностью (2)—(3) имеет следующие этапы.

Этап 1. Интегрирование уравнений

$$\text{а) } L_3V_{31} = (Q_0 + Q_1)K^{-1}, \qquad \text{б) } \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\Phi + 2a\frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi = s^2c^2\Phi \tag{5}$$

при условиях

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi(\xi,0;s) = sV_{31}(\xi,s), \quad Q_1 = -\varrho s\Phi(\xi,0;s), \quad V'_{31}(0,s) = 0 \tag{6}$$

и при условиях затухания на бесконечности.

Этап 2. Интегрирование уравнений

$$L_1V_1 = -PV'_{31}, \quad L_1V_2 = 3KV'_{31}; \quad P = a_1 + \nu a_2 \tag{7}$$

с учетом краевых условий $V_1(0,s) = 0$, $V_2(0,s) = 0$ и условий на бесконечности (V_{31} — известна из этапа 1).

Этап 3. Построение частного решения уравнения

$$L_3V_{32} = K^{-1}PV'_1 - V'_2 \tag{8}$$

при помощи теперь уже известных V_1 и V_2 и вычисление $V_3 = V_{31} + V_{32}$. Здесь

$$L_i = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - s_i^2 \quad (i = 1, 3), \quad s_1 = ks, \quad s_3 = k_T^{-1}s. \tag{9}$$

Представляя решение уравнения (5б) в виде

$$\Phi(\xi;\zeta;s) = A(\xi,s)e^{\lambda_1\zeta} + B(\xi,s)e^{\lambda_2\zeta}, \quad \lambda_{1,2} = -a \mp \sqrt{a^2 + c^2s^2}, \tag{10}$$

нетрудно установить, что $B(\xi,s) = 0$, $Q_1 = -\varrho s^2\lambda_1^{-1}V_3$. Интегрируя (5а), получим решение первого этапа

$$V_{31} = \frac{1}{2}K^{-1}\varkappa^{-1}\{[F_1^{(3)}(\xi) + F_2^{(3)}(\infty)]e^{-\varkappa\xi} - [F_2^{(3)}(\xi) - F_2^{(3)}(\infty)]e^{\varkappa\xi}\}, \tag{11}$$
$$\varkappa^2 = s_3^2(1 - \varrho k^{-2}\lambda_1^{-1}).$$

Решение второго этапа

$$V_1 = -\frac{P}{2K(\varkappa^2 - s_1^2)}\{[F_1^{(1)}(\xi) + F_2^{(1)}(\infty)]e^{-s_1\xi} + [F_2^{(1)}(\xi) - F_2^{(1)}(\infty)]e^{s_1\xi} -$$
$$-[F_1^{(3)}(\xi) + F_2^{(3)}(\infty)]e^{-\varkappa\xi} - [F_2^{(3)}(\xi) - F_2^{(3)}(\infty)]e^{\varkappa\xi}\}, \tag{12}$$

$$V_2 = -\frac{3K}{P}V_1. \tag{13}$$

Решение третьего этапа

$$V_{32} = -\frac{3s_1}{2(\varkappa^2 - s_1^2)^2}\{[F_1^{(1)}(\xi) + F_2^{(1)}(\infty)]e^{-s_1\xi} - \\ - [F_2^{(1)}(\xi) - F_2^{(1)}(\infty)]e^{s_1\xi}\}. \quad (14)$$

В формулах (11)—(14)

$$F_j^{(i)}(\xi) = \int_0^\xi e^{-\mu_{ij}x} Q_0(x, s)\,dx \qquad (i = 1,\ 3;\ j = 1,\ 2), \quad (15)$$

$$\mu_{11} = -ks,\ \mu_{12} = ks,\ \mu_{31} = -\varkappa,\ \mu_{32} = \varkappa.$$

Если задано давление падающей волны, то под $\tilde{q}_0$ надо подразумевать сумму давлений падающей и отраженной от неподвижной оболочки волн. Если, например, изображение Лапласа в зависимости от давления падающей волны имеет вид $s^{-n/2}G(\xi)\exp[-sp(\xi)]$, как предполагалось в [2], то имеем

$$Q_0 = 2\sqrt{B}\sqrt{a^2 + c^2s^2}(a + \sqrt{a^2 + c^2s^2})^{-1}s^{-n/2}G(\xi)\exp[-\mathrm{sp}(\xi)]. \quad (16)$$

Полученные результаты отличаются от таковых в [2] только тем, что вместо s_3 стоит $\varkappa$. Поэтому, если Q_0 имеет вид (16), то интегралы (15) могут быть вычислены по методике работы [2]. Далее, применяя теоремы о свертке и смещении, нетрудно вычислить оригинал решения по формулам работы [2], если пренебречь членами порядка a/cs — малыми по сравнению с единицей.

Результаты вычисления оригинала приводят к следующим выводам: 1) учет среды не изменяет порядка разрывов на фронтах; 2) вдоль второго фронта упругих волн разрывы убывают по закону $\exp\left(-\frac{1}{2}\varrho k^{-2}c^{-1}\xi\right)$ где ξ_* — расстояние от точки возникновения этого фронта; 3) учет среды с точностью использованной модели не оказывает влияния на разрывы на фронте нагрузки и на первом фронте упругих волн. В частном случае, для пластинки удалось показать, что, применяя более точную модель среды, предположение о малости φ'' и φ', использованное при получении (3), приводит к погрешности порядка c^{-2} по сравнению с единицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н. А., Тр. VI Всес. конфер. по теории оболочек и пластинок, М., 1966, с. 44.
2. Кутсер М. Э., Нигул У. К., ПММ, 33, 609 (1969).
3. Григолюк Э. И., Куршин Л. М., Присекин В. Л., ДАН СССР, 155, 65 (1964).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
31/III 1970