EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.19

И. ПЕТЕРСЕН

ОДНА СЕРИЯ ПЛАНОВ РЕГРЕССИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ШАРАХ

I. PETERSEN. ÜKS REGRESSIOONKATSETE PLAANIDE SEERIA KERADEL

I. PETERSEN. A SERIES OF DESIGNS OF REGRESSION EXPERIMENTS ON BALLS

В [1] нами было установлено, что мера Чебышева

$$\mu(dx)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)dx}{\pi^{\frac{n+2}{2}}\sqrt{1-\|x\|^2}} \tag{1}$$

как непрерывный план регрессионных экспериментов [2, 3] степени m на n-мерном единичном шаре S_n точно в $(n+2m)/(n+m)$ раз хуже, в смысле минимакса дисперсии оценки, чем оптимальный для каждого m и n непрерывный план. Нахождение дискретной меры, имеющей такую же информационную матрицу для полиномов степени m, как мера Чебышева, сводится к построению квадратурной формулы с положительными коэффициентами, имеющей алгебраическую точность $2m$. В двумерном случае такие формулы по мере (1) были представлены в [4]. В n-мерном случае квадратурные формулы по мере (1) получаются модифицированием формулы И. Мысовских [5, 6].

Пусть m — нечетно. Формула

$$\int\limits_{S_n} f(x)\,\mu(dx)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(2m+1)\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\sum_{i=0}^{2m}\sum_{i_2,\,\ldots,\,i_{n-1}=1}^{m+1} A_k C_{i_2}^{(0)}\ldots C_{i_{n-1}}^{(n-3)} f(x^{(p)}), \tag{2}$$

имеющая $N_1=\frac{2m+1}{2}(m+1)^{n-1}$ узлов $x^{(p)}$, где $p=(k,\,i,\,i_2,\,\ldots,\,i_{n-1})$, имеет алгебраическую точность $2m$, если

$$\begin{aligned}
x_1^{(p)}&=r_k\sin\Theta_{n-1}^{(i_{n-1})}\ldots\sin\Theta_2^{(i_2)}\sin\frac{2\pi i}{2m+1},\\
x_2^{(p)}&=r_k\sin\Theta_{n-1}^{(i_{n-1})}\ldots\sin\Theta_2^{(i_2)}\cos\frac{2\pi i}{2m+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1}^{(p)}&=r_k\sin\Theta_{n-1}^{(i_{n-1})},\\
x_n^{(p)}&=r_k\cos\Theta_{n-1}^{(i_{n-1})}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\Theta_{j+2}^{(l)} = \arccos t_l^{(j)}; \tag{4}$$

$t_l^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-3)$ — нули ультрасферических полиномов $P_{m+1}^{\left(\frac{j+1}{2}\right)}(t)$; $C_l^{(j)}$— соответствующие коэффициенты Кристоффеля;

$$r_k = \sqrt{\frac{u_k+1}{2}}, \tag{5}$$

где u_k — нули полинома Якоби $P_{(m+1)/2}^{(-1/2,\, n/2-1)}(u)$ и A_k — соответствующие коэффициенты Кристоффеля.

При четном m вместо (2) имеем формулу, точную для полиномов степени $2m$, в виде

$$\int\limits_{S_n} f(x)\,\mu(dx) = \binom{n+m}{n}^{-1} f(0) + \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(2m+1)(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{2m} \sum_{i_2,\ldots,i_{n-1}=1}^{m+1} B_k C_{i_2}^{(0)} \ldots C_{i_{n-1}}^{(n-3)} f(x^{(p)}). \tag{6}$$

Формула (6) имеет $N_2 = 1 + \frac{2m+1}{2} m(m+1)^{n-2}$ узлов $x^{(p)}$, причем $x^{(p)}$ и $C_l^{(j)}$ определены как и в случае формулы (2) с тем только различием, что u_k теперь являются нулями полинома Якоби $P_{m/2}^{(-1/2,\, n/2)}(u)$, а B_k — соответствующие этому весу коэффициенты Кристоффеля.

Если формулы (2) и (6) представить в одинаковой форме

$$\int\limits_{S_n} f(x)\,\mu(dx) = \sum_p D^{(p)} f(x^{(p)}) \tag{7}$$

и через N обозначить число узлов, то в случае любого нечетного m имеет место асимптотическое неравенство

$$\max_p ND^{(p)} \lesssim \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{\frac{n-1}{2}}, \tag{8}$$

а в случае четного m

$$\max_p ND^{(p)} \lesssim \max\left[\frac{N_2}{\binom{n+m}{n}},\ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{N_2}{N_2-1}\right], \tag{9}$$

где N_2 — число узлов формулы (6).

Система узлов $x^{(p)}$ квадратурной формулы по мере Чебышева является хорошим планом регрессионных экспериментов тогда, когда точность экспериментов в узлах пропорциональна соответствующим коэффициентам $D^{(p)}$. Максимальная в S_n дисперсия в таком случае только в $(n+2m)/(n+m)$ раз больше оптимальной.

Построенную систему узлов $x^{(p)}$ можно рассматривать планом экспериментов также для равноточных экспериментов. Соответствующая информационная матрица тогда уже не совпадает с информационной матрицей по мере Чебышева и максимальная дисперсия, в общем, увеличивается. Тем не менее можно указать [7] (хотя и грубую) границу $d_{n,m}$ максимальной дисперсии соответствующей оценки, приведенной к единичной дисперсии, к одному наблюдению и к одному оцениваемому коэффициенту:

$$d_{n,m} \leqslant \frac{n+2m}{n+m} \max_{p} ND^{(p)}. \tag{10}$$

Все узлы $x^{(p)}$ в (3) являются внутренними точками шара S_n. Поэтому эту систему можно преобразовать растяжением $\tilde{x}^{(p)} = \frac{1}{\max r_k} x^{(p)}$ так, чтобы крайние точки находились на сфере S_n. Максимальная дисперсия может вследствие такого преобразования только уменьшаться.

Ниже приведены полярные координаты точек $\tilde{x}^{(p)}$ для $n=2$ и $m = 1, 2, \ldots, 8$ и точные значения максимальных дисперсий $d_{2,m}$ в единичной окружности. Все эти планы ротатабельны.

m	N	r_k	Θ_i $(i=0, 1, \ldots, 2m)$	$d_{2,m}$
1	3	1	$2\pi i/3$	1
2	6	0		1
		1	$2\pi i/5$	
3	14	0,54057	$2\pi i/7$	1,35879
		1	$2\pi i/7$	
4	19	0		1,26667
		0,67186	$2\pi i/9$	
		1	$2\pi i/9$	
5	33	0,37199	$2\pi i/11$	1,51258
		0,77252	$2\pi i/11$	
		1	$2\pi i/11$	
6	40	0		1,42857
		0,50107	$2\pi i/13$	
		0,82442	$2\pi i/13$	
		1	$2\pi i/13$	
7	60	0,28382	$2\pi i/15$	1,59490
		0,61485	$2\pi i/15$	
		0,86546	$2\pi i/15$	
		1	$2\pi i/15$	
8	69	0		1,53333
		0,39849	$2\pi i/17$	
		0,68335	$2\pi i/17$	
		0,89065	$2\pi i/17$	
		1	$2\pi i/17$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 137 (1970).
2. Farrell R. H., Kiefer J., Walbran A., Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob., **1**, 113 (1967).
3. Голикова Т. И., Микешина Н. Г., В сб.: Новые идеи в планировании эксперимента, М., 1969.
4. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 132 (1970).
5. Мысовских И. П., Сиб. матем. ж., **5**, 721 (1964).
6. Мысовских И. П., ДАН СССР, **147**, 552 (1962).
7. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 404 (1969).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
25/III 1970