все КФ каждой из построенных выше групп переводились в различные состояния $\mathfrak{S}(i, j, T+1)$. Это можно осуществить, так как число КФ в каждой из групп совпадает с мощностью множества S. В каждой группе число таких переводов, очевидно, равно $(S!)$. В группе же, содержащей и $\mathfrak{S}^{0}_{m^2}(i, j, T)$, число переводов будет равно $(S-1)!$ А так как число самих групп равно S^8, то как нетрудно показать, число функций перехода $\mathfrak{L}_{(1)}$, не порождающих структур $ST(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ с СТКФ, не меньше величины $(S!)^{S^8}/S$, что завершает третью часть доказательства, а этим и доказательство всей нашей теоремы.

Доказанная теорема показывает, что требование наличия в структуре СТКФ для существования в ней НКФ [1] не является необходимым, т. е. наличие в структуре СТКФ лишь достаточно для существования НКФ.

Теорема дает также некоторые достаточные условия существования НКФ в сотообразных структурах. Эти условия позволяют сравнительно легко получать и сам вид НКФ.

Доказательство теоремы ради простоты велось для двумерных структур, однако теорема с очевидными изменениями справедлива и в случае N-мерных сотообразных структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore E., In: Proc. Sympos. Appl. Math. 14, N. Y., 1962.
2. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 159 (1970).
3. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Биол., **19**, 266 (1970)
4. Клини С., Введение в метаматематику, М., 1957.
5. Myhill J., Proc. Amer. Math. Soc., **14**, № 4 (1963).
6. Myhill J., In: Essays on Cellular Automata, 1970 (в печати).

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/XII 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.18

РЭЭТ ПУКК

АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИЙ СТЕПЕНЬ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ

REET PUKK. INTEGRANDI SILEDUST ARVESTAV INTEGREERIMISALGORITM

REET PUKK. ALGORITHM OF INTEGRATION, TAKING INTO ACCOUNT THE DEGREE OF SMOOTHNESS OF THE INTEGRAND

Как известно [1–4], экономная тактика вычисления определенного интеграла с заданной (абсолютной или относительной) точностью от функций, имеющих нерегулярность (напр., разрывную производную или «почти особенность» типа $1:[10^{-10}+(x-x_0)^2]$) на отрезке интегрирования, состоит в следующем: около точек, вблизи которых функция «плохая», нужно интегрировать по малым отрезкам и с помощью квадратурных формул низкой точности. По мере удаления от таких точек следует увеличивать отрезки и повышать точность используемых формул.

Предлагаемый в данной заметке подход к построению алгоритмов интегрирования дает возможность определить степень гладкости подынтегральной функции на рассматриваемом промежутке отрезка интегрирования и в зависимости от этого разработать различные тактики продолжения процесса вычисления.

Рассмотрим задачу: необходимо дать алгоритм, позволяющий вычислить интеграл

$$I=\int_A^B f(x)\,dx \tag{1}$$

с заданной точностью ε за возможно меньшее число обращений к вычислению подынтегральной функции. Ради простоты возьмем формулу Симпсона (аналогичные идеи можно развивать и в случае других квадратурных формул, напр., гауссовых и уточняющих [4,5]).

Обозначим через S_n приближенное значение $\int_a^b f(x)\,dx$, полученное путем дробления отрезка $[a,b]$ на 2^n $(n=0,1,2,\ldots)$ равных частей с последующим применением на каждой из них формулы Симпсона, т. е.

$$S_n=\frac{b-a}{6\cdot 2^n}\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+4f(x_{k-1})+f(x_k)\}, \tag{2}$$

где $x_i=a+i\dfrac{b-a}{k}$; $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$; $k=2^{n+1}$; $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Определим показатель гладкости γ для функции $f(x)$ на $[a,b]$ по формуле

$$\gamma=\frac{1}{\ln 2}\ln\left|\frac{S_{n+1}-S_n}{S_{n+2}-S_{n+1}}\right|. \tag{3}$$

Введенный нами показатель гладкости γ тесно связан со скоростью убывания остаточного члена квадратурной формулы. Пусть вычислено приближенное значение интеграла S_{n+2} шагом h и остаточный член квадратурной формулы

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-S_{n+2}\right|\approx \varkappa h^q \qquad (\varkappa=\text{const}).$$

Используя равенства

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-S_{n+1}\right|\approx\varkappa(2h)^q \quad \text{и} \quad \left|\int_a^b f(x)\,dx-S_n\right|\approx\varkappa(4h)^q,$$

получим

$$\gamma=\frac{1}{\ln 2}\ln\left|\frac{S_{n+1}-S_n}{S_{n+2}-S_{n+1}}\right|\approx\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln 2^q=q.$$

Если $f(x)$ обладает на отрезке $[a,b]$ непрерывной не сильно меняющейся производной $f^{(4)}(x)$, то в случае формулы Симпсона $q=4$, следовательно, и $\gamma\approx 4$. Если же $f(x)$ не является настолько гладкой, то γ, как правило, значительно меньше.

Опишем схему алгоритма вычисления приближенного значения $\int_a^b f(x)\,dx$ на отрезке $[a,b]\subseteq[A,B]$, причем в начале вычислений $[a,b]$ берется равным $[A,B]$.

По формуле (2) вычисляются приближенные значения $\int_a^b f(x)\,dx$: $S_0, S_1, S_2, \ldots$ После вычисления очередного S_n $(n=1,2,3,\ldots)$ проверяется, не достигнута ли требуемая точность. Если точность не достигнута, по формуле (3) вычисляется γ при $n=2,3,4,\ldots$ В случае $\gamma\geqslant 2$ считается, что функция достаточно гладкая и процесс дробления продолжается до тех пор, пока не достигается требуемая точность. (Здесь было бы разумно применить экстраполяцию по Ричардсону [6] для построения квадратурных формул с нарастающей алгебраической точностью, т. е. для построения метода Ромберга [7]. В рассматриваемой программе эта возможность не реализована и в результатах не отражается).

Если же на некотором шагу $\gamma < 2$, то считается, что на отрезке $[a, b]$ функция «плохая». Прогнозируем, не достигается ли желаемая точность с помощью p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$* дальнейших дроблений, т. е. с помощью S_{n+p} по формуле

$$|S_{n+p} - S_{n+p-1}| \approx |S_n - S_{n-1}| : 2^{p\gamma}.$$

В случае положительного ответа вычисляются $S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots, S_{n+p}$ и каждый раз проверяется критерий точности.

При недостижении точности с помощью S_{n+p} и при отрицательном прогнозе отрезок $[a, b]$ делят пополам и весь процесс повторяют на левой половине, т. е. на $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

Внешний цикл — обычный. При достижении точности на $[a, b]$ следующий отрезок берется равным $[b, \min\{B;\ b + 2(b - a)\}]$.

В таблице приведены результаты счета по двум алгоритмам. В строках A приведено число обращений по алгоритму: квадратурная формула Симпсона применяется на каждом из отрезков интегрирования при дроблении $[A, B]$ на 2^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ частей. Процесс разбиения прекращается, когда два последовательных приближения удовлетворяют выбранному критерию точности. В строках B приведено число обращений по экономному алгоритму.

	ε	$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$	$\int_0^1 \sqrt[4]{x}\, dx$	$\int_0^1 e^{25x^2}\, dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{2^{-16} + (x - 0{,}5)^2}$	$\int_0^1 \frac{dx}{0{,}001 + x^2}$
	10^{-3}	33	129	257	2049	257
A	10^{-4}	257	513	513	2049	257
	10^{-5}	1025	4097	513	4097	257
	10^{-3}	33	87	175	321	105
B	10^{-4}	113	230	334	465	137
	10^{-5}	203	424	399	673	185

В случае двух первых интегралов рассматривалась абсолютная точность, в остальных — относительная точность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пукк Р. А., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **5**, 185 (1965).
2. Wright K., Comp. J., **9**, 191 (1966).
3. O'Hara H., Smith F. J., Comp. J., **12**, 179 (1969).
4. Пукк Р. А., Алгоритмы и программы однократного и двукратного интегрирования. экономящие число обращений к подынтегральной функции. Диссертация, Таллин, 1967.
5. Пукк Р. А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 466 (1967).
6. Rutishauser H., Num. Math., 5, 48 (1963).
7. Bauer F. L., Rutishauser H., Stiefel E., Proc. XV Symp. Appl. Math., Amer. Math. Soc., XV, 199 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
5/I 1970

* В программе $p = 3$.