ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкович И. М., Уч. зап. ЛГУ, № 177, 194 (1954).
2. Peralta L. A., Raynor S., J. Acoust. Soc. America, **36**, 476 (1964).
3. Milenkovic V., Raynor S., J. Acoust. Soc. America, **39**, 556 (1966).
4. Алумяэ Н. А., В кн.: Тр. VI Всес. конфер. по теории оболочек и пластинок, М., 1966, с. 44.
5. Кутсер М. Э., Нигул У. К., ПММ, 33, 609 (1969).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/XII 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.17

В. АЛАДЬЕВ

ОДНА ТЕОРЕМА ТЕОРИИ СОТООБРАЗНЫХ СТРУКТУР

V. ALADJEV. ÜKS TEOREEM KARJEKUJULISTE STRUKTUURIDE TEOORIAST

V. ALADYEV. A THEOREM ON THE THEORY OF CELLULAR STRUCTURES

Настоящая заметка посвящена вопросам существования в однородных структурах, составленных из автоматов Мура, неконструируемых (НКФ) и стираемых (СТКФ) конфигураций и является непосредственным продолжением работ [1, 3]. Все используемые в заметке понятия, определения и обозначения соответствуют [1–4]. Основной результат выражает следующая

теорема.

1. *Для того, чтобы структура* $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ *имела* НКФ, *достаточно выполнения одного из условий:*

а) $(\exists p)\,(\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T) \to (\mathfrak{S}(i, j, T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow (\mathfrak{S}(i, j, T) =$
$$= S_p \,\&\, \mathfrak{S}(i+e, j+k, T) \neq S_p (e, k = \pm 1)));$$

б) $(\exists p)\,(\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T) \to (\mathfrak{S}(i, j, T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow (\mathfrak{S}(i, j, T) =$
$$= S_q \neq S_p \,\&\, \mathfrak{S}(i+1, j+1, T) = S_p));$$

в) $\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T) \to (\mathfrak{S}(i, j, T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow (S_p \,\overline{\in}\, \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T));$

г) $(\exists p)\,(\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T) \to (\mathfrak{S}(i, j, T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow$
$$\longleftrightarrow (\mathfrak{S}(i+1, j+1, T) = S_q \,\&\, \mathfrak{S}(i-1, j-1, T) = S_p \neq S_q)).$$

2. *Структура может иметь* НКФ *или быть* СТКФ-*восприимчивой, не имея при этом* СТКФ. ★

★ В [1] Э. Мур доказал следующую важную теорему: *если в структуре существуют* СТКФ, *то в ней существуют и* НКФ. После сдачи настоящей заметки в редакцию автор познакомился с работой [5], в которой Дж. Майхилл доказал теорему, обратную теореме Мура [1]: *если в структуре существуют* НКФ, *то в ней существуют и* СТКФ. При этом понятие «конфигурации» у Майхилла отличается от муровского. Используя теорему нашей заметки, можно показать, что *в смысле Мура теорема Майхилла* [5] *в общем случае неверна.* Для этого, очевидно, достаточно построить такую

3. *Число структур, не обладающих* СТКФ, *не меньше величины* $(S!)^{s^s}/S$.

Доказательство. 1. Для доказательства (а) необходимо показать, что в определенной таким образом структуре существуют НКФ.

Рассмотрим в момент T следующую КФ: $\mathfrak{A}\{\mathfrak{S}(i, j, T) = \mathfrak{S}(i+1, j+1, T) = S_p\}$. Оказывается, что невозможно найти такую КФ в момент $T-1$, из которой можно было бы получить КФ $\mathfrak{A}$ в момент T. Действительно, в противном случае $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T-1)$ и $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i+1, j+1, T-1)$ должны содержать центральные автоматы в состоянии S_p. Но согласно функции $\mathfrak{L}_{(1)}$ получаем, что в этом случае в момент T будет выполняться $\mathfrak{S}(i, j, T) \neq \mathfrak{S}(i+1, j+1, T)$, что противоречит виду КФ $\mathfrak{A}$.

Методом индукции от T к $T-1$ получаем, что КФ вида $\mathfrak{A}$ могут в $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ существовать только в момент $T=0$. Согласно же определению НКФ [1] получаем, что КФ вида $\mathfrak{A}$ и есть НКФ.

Пункты (б) — (г) доказываются аналогичным образом с подбором соответствующей НКФ.

Можно показать, что система условий типа (а) — (г) не является полной. Этим доказательство первой части теоремы закончено.

2. Рассмотрим частный случай функции $\mathfrak{L}_{(1)}$, определенной соотношениями вида 1 (а):

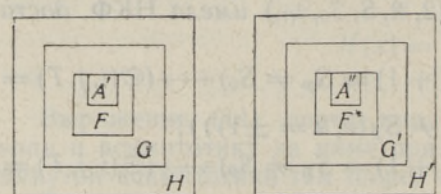
$$(\forall p)\,(\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T) \to (\mathfrak{S}(i, j, T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow (\mathfrak{S}(i, j, T) = S_p \,\&\, \mathfrak{S}(i+e, j+k, T) \neq S_p\,(e, k = \pm 1)))\,.$$

Легко заметить, что определенная таким образом структура — полная [3].

Выберем взаимно стираемые КФ с блоками F и F^* размером в один автомат.

Имеются следующие возможности: $(\text{КФ}(F) \,\&\, \text{КФ}(F^*) \neq S_0) \,\&\, \text{КФ}(F) \neq \text{КФ}(F^*)$; $\text{КФ}(F) = S_0 \,\&\, \text{КФ}(F^*) \neq S_0$ и $\text{КФ}(F) \neq S_0 \,\&\, \text{КФ}(F^*) = S_0$.

Рассмотрим первую возможность. Так как КФ на рис. 1 существуют в момент $T \neq 0$, то они не есть НКФ, т. е. КФ (G) и КФ (G') не содержат автоматов в тех же состояниях, что и автоматы F и F^*. Следовательно, в момент $T+1$ автоматы F и F^* согласно $\mathfrak{L}_{(1)}$ перейдут опять в отличные друг от друга состояния, что противоречит определению СТКФ [1].



$\text{КФ}(F, T) \neq \text{КФ}(F^*, T)$

$(\text{КФ}(G, T) = \text{КФ}(G', T) \,\&$
$\&\,(\text{КФ}(H, T) = \text{КФ}(H', T))$

Рис. 1.

Повторяя с очевидными изменениями данные рассуждения, получаем, что и в остальных случаях невозможно существование в

$\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$, в которой при отсутствии СТКФ в смысле Мура существовали бы НКФ. Второй пункт нашей теоремы дает ответ только для случая ограниченных $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$. (Как любезно сообщил автору Дж. Майхилл [6], аналогичный результат получили также Аморозо и Коупер.) Более общий пример дает следующим образом заданная структура ST*: множество состояний задается в виде $S : \{S_0 = 0, 1, \ldots, p\}$, а функция перехода $\mathfrak{L}_{(1)}$ задается так, что

$$\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T) \to \mathfrak{S}(i, j, T+1) = p$$

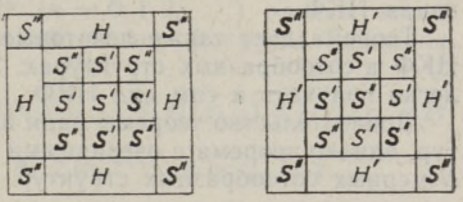
тогда, когда в $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T)$ только $\hat{\hat{\mathfrak{S}}}(i, j, T) = p$, иначе

$$\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T) \to \mathfrak{S}(i, j, T+1) = \oplus \sum_k \mathfrak{S}_{<i,j>}(k, T) \pmod p,$$

$\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ СТКФ с внутренним блоком размером в один автомат.

Рассмотрим теперь СТКФ с внутренним блоком размера $p \times p\,(p > 1)$ (см. рис. 1). Очевидно, что КФ (F, T) и КФ (F^*, T) должны отличаться состояниями по крайней мере хоть одного соответствующего друг другу граничного автомата (СДДА) блоков F и F^* $(A'$ и $A'')$. Пусть в момент T автоматы A' и A'' находятся, соответственно, в состояниях S' и S'' $(S' \neq S'')$. Значит, $S' \neq S_0 \vee S'' \neq S_0$. В результате дальнейших рассуждений, повторяющих рассуждения в случае размера внутреннего блока $p = 1$, получаем, что в момент $T+1$ с помощью вышеопределенной функции $\mathfrak{L}_{(1)}$ невозможно получить даже условия $\text{КФ}(F, T+1) = \text{КФ}(F^*, T+1)$, а это и доказывает отсутствие в $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ СТКФ с внутренним блоком размера $p \times p\ (p \geqslant 1)$.

Выделим теперь в структуре две КФ следующего вида (см. рис. 2).



$\text{КФ}(H, T) = \text{КФ}(H', T)$

Рис. 2.

Рассмотрим во что перейдут с помощью функции $\mathfrak{L}_{(1)}$ эти КФ в момент $T+1$. Легко показать, что для этого все автоматы в состояниях S' и S'' необходимо заменить на автоматы в состоянии S_0, т. е. получаем, что $\text{КФ}(F,\ T+1) = \text{КФ}(F^*, T+1)\ \&\ \text{КФ}\,(G,\ T+1) = \text{КФ}(G', T+1)$. Таким образом, в $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ имеется возможность существования по крайней мере хоть одной пары взаимно стираемых КФ, но эти КФ, как мы доказали выше, являются НКФ, что и завершает вторую часть доказательства.

3. Предположим теперь, что в момент T в произвольной $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ мы выделили пару блоков F и F^* размером $p \times p$ $(p \geqslant 1)$ с окружающими их блоками G, G' и H, H' (см. рис. 1). Так как $\text{КФ}(F, T) \neq \text{КФ}(F^*, T)$ и $p \geqslant 1$, то F и F^* должны отличаться состояниями по крайней мере хоть одного СДДА.

Рассмотрим произвольную $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T)$. Будем придавать автомату в верхнем правом углу $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T)$ значения из множества S, оставляя остальные автоматы без изменения (неизмененные автоматы обозначим через $\mathfrak{C}$). Получаем группу из S КФ указанного вида. Количество же групп такого типа, получающихся путем варьирования состояний автоматов в $\mathfrak{C}$, равно, очевидно, S^8. Внутри каждой из S^8 групп КФ отличаются только состоянием автомата в верхнем правом углу $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T)$, а между самими группами КФ отличаются или другими СДДА, или более чем одним автоматом.

Сравнительно легко показать, что для отсутствия СТКФ в $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ достаточно задать функцию перехода $\mathfrak{L}_{(1)}$ так, чтобы

где $\hat{\mathfrak{S}}(i, j, T)$ — состояние автомата, находящегося в верхнем правом углу $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T)$, а $\mathfrak{S}_{<i,j>}(k, T)$ — состояние k-го $(k = \overline{1,9})$ автомата из $\mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i, j, T)$. Нетрудно убедиться, что заданная таким образом структура ST* соответствует муровскому определению $\mathrm{ST}(2,\ \mathfrak{R},\ S,\ S_0,\ \mathfrak{L}_{(1)})$. Используя теперь нашу теорему, можно показать, что в ST* существуют НКФ при отсутствии в ней СТКФ в смысле Мура. Наши выводы справедливы и для случая N-мерных $\mathrm{ST}(N,\ \mathfrak{R},\ S,\ S_0,\ \mathfrak{L}_{(1)})$. Более того, можно показать, что справедлив следующий к о р о л л а р и й. *Число полных* $\mathrm{ST}(2,\ \mathfrak{R},\ S,\ S_0,\ \mathfrak{L}_{(1)})$, *обладающих* НКФ *и не обладающих* СТКФ, *не менее* $(s-2)\,[(s-1)!]^{s^8-1} \times (s-1)^{s^8-(s-1)^8}$. $\quad \text{КФ} - \text{НКФ} \Leftrightarrow \mathfrak{M}\,[\mathfrak{L}_{(1)}^{-1}(\text{КФ})] = 0.$ $\quad \text{КФ}_0 - \text{СКФ} \Leftrightarrow (\forall \mathrm{T} \in \mathfrak{T}^* \subset \mathfrak{T} = \mathrm{N} \cup 0,\ \mathfrak{M}\,[\mathfrak{T}^*] = \infty),\ (\exists \mathfrak{L}_{(1)}^{-\mathrm{T}}(\text{КФ}_0))\,(\text{КФ}\,(\mathfrak{L}_{(1)}^{-\mathrm{T}}(\text{КФ}_0)) = \text{КФ}_0)$.

(Добавление при корректуре. — *Ред.*)

все КФ каждой из построенных выше групп переводились в различные состояния $\mathfrak{S}(i, j, T+1)$. Это можно осуществить, так как число КФ в каждой из групп совпадает с мощностью множества S. В каждой группе число таких переводов, очевидно, равно $(S!)$. В группе же, содержащей и $\mathfrak{S}^0_{\mathrm{m}^2}(i, j, T)$, число переводов будет равно $(S-1)!$ А так как число самих групп равно S^8, то как нетрудно показать, число функций перехода $\mathfrak{L}_{(1)}$, не порождающих структур $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ с СТКФ, не меньше величины $(S!)^{S^8}/S$, что завершает третью часть доказательства, а этим и доказательство всей нашей теоремы.

Доказанная теорема показывает, что требование наличия в структуре СТКФ для существования в ней НКФ [1] не является необходимым, т. е. наличие в структуре СТКФ лишь достаточно для существования НКФ.

Теорема дает также некоторые достаточные условия существования НКФ в сотообразных структурах. Эти условия позволяют сравнительно легко получать и сам вид НКФ.

Доказательство теоремы ради простоты велось для двумерных структур, однако теорема с очевидными изменениями справедлива и в случае N-мерных сотообразных структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore E., In: Proc. Sympos. Appl. Math. 14, N. Y., 1962.
2. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 159 (1970).
3. Аладьев В., Изв. АН ЭССР, Биол., **19**, 266 (1970)
4. Клини С., Введение в метаматематику, М., 1957.
5. Myhill J., Proc. Amer. Math. Soc., **14**, № 4 (1963).
6. Myhill J., In: Essays on Cellular Automata, 1970 (в печати).

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/XII 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

РЭЭТ ПУКК

АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИЙ СТЕПЕНЬ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ

REET PUKK. INTEGRANDI SILEDUST ARVESTAV INTEGREERIMISALGORITM

REET PUKK. ALGORITHM OF INTEGRATION, TAKING INTO ACCOUNT THE DEGREE OF SMOOTHNESS OF THE INTEGRAND

Как известно [1–4], экономная тактика вычисления определенного интеграла с заданной (абсолютной или относительной) точностью от функций, имеющих нерегулярность (напр., разрывную производную или «почти особенность» типа $1:[10^{-10}+(x-x_0)^2]$) на отрезке интегрирования, состоит в следующем: около точек, вблизи которых функция «плохая», нужно интегрировать по малым отрезкам и с помощью квадратурных формул низкой точности. По мере удаления от таких точек следует увеличивать отрезки и повышать точность используемых формул.

Предлагаемый в данной заметке подход к построению алгоритмов интегрирования дает возможность определить степень гладкости подынтегральной функции на рассматриваемом промежутке отрезка интегри-