EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.16

М. КУТСЕР

О ВЛИЯНИИ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ НА АМПЛИТУДЫ РАЗРЫВОВ НА ФРОНТАХ ВОЛН В МЕМБРАНЕ ПРИ ДАВЛЕНИИ, НАБЕГАЮЩЕМ С УБЫВАЮЩЕЙ СКОРОСТЬЮ

M. KUTSER. AKUSTILISE KESKKONNA MÕJUST KATKEVUSTE AMPLITUUDIDELE LAINEFRONTIDEL MEMBRAANIS VÄHENEVA KIIRUSEGA LEVIVA RÕHU KORRAL

M. KUTSER. ON THE INFLUENCE OF ACOUSTIC MEDIUM ON THE INTENSITY OF DISCONTINUITIES ON WAVE-FRONTS IN THE CASE OF DECELERATING PRESSURE WAVE

Для мембраны, находящейся на поверхности акустической среды, выясняется влияние среды на интенсивность разрывов на фронтах одномерных волн, возникающих под действием давления, набегающего с убывающей скоростью симметрично относительно начала координат. Показано, что интенсивность разрыва на фронте волны, распространяющегося в мембране со скоростью упругой волны, уменьшается по экспоненциальному закону.

К рассматриваемому вопросу по своей постановке близки геофизические задачи об ослаблении интенсивности волн в жидкости при прохождении сквозь упругий слой [1], а также задачи взаимодействия оболочки с акустической средой [2, 3]. Разрывы на фронтах волн в мембранах и оболочках при действии давления, набегающего с убывающей скоростью, без учета влияния окружающей среды рассмотрены в [4, 5].

Пусть ξ, η — безразмерные (деленные на h) координаты соответственно в плоскости мембраны и по нормали к ней; $\varrho_ж$, $\varrho_м$ — плотности жидкости и мембраны; $c_ж$, $c_м$ — скорости распространения волн в жидкости и в мембране; $\tau = c_м t/h$ — безразмерное время; $c = c_м/c_ж$ — относительная скорость; $\varrho = \varrho_ж/\varrho_м$ — относительная плотность; $w(\xi,\tau)$ — безразмерное перемещение мембраны; $q(\xi,\tau)$ — заданное безразмерное давление и $\varphi(\xi,\zeta;\tau)$ — безразмерный потенциал скорости в жидкости; частные производные обозначим так: $\frac{\partial}{\partial\xi} = (\ldots)'$, $\frac{\partial}{\partial\tau} = (\ldots)^{\cdot}$.

В принятых обозначениях задачу можно свести к интегрированию системы уравнений

$$w'' - w^{\cdot\cdot} = -q + q_*, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + \varphi'' - c^2\varphi^{\cdot\cdot} = 0 \tag{1}$$

при условиях:

$$\begin{gathered} q_* = -\varrho\varphi^{\cdot}(\xi, 0; \tau), \qquad \frac{\partial}{\partial\zeta}\varphi(\xi, 0; \tau) = w^{\cdot}, \\ w'(0,\tau) = 0, \quad w(\xi, 0) = w^{\cdot}(\xi, 0) = 0, \quad \varphi(\xi, \zeta; 0) = \varphi^{\cdot}(\xi, \zeta; 0) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Применяя к (1)—(2) преобразование Лапласа с параметром s и преобразование Фурье с параметром μ, получим

$$\begin{gathered} -(\mu^2 + s^2)\, w^{LF} = -q^{LF} + q_*^{LF}, \qquad \varphi^{LF} = -s\lambda^{-1} w^{LF} e^{-\lambda\zeta}, \\ q_*^{LF} = \varrho s^2 \lambda^{-1} w^{LF}, \qquad \lambda = +\sqrt{\mu^2 + c^2 s^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Введем новую переменную $p = \mu/s$ и рассмотрим случай, когда

$$q = H(\tau - k_0\xi^2), \qquad q^{LF} = \sqrt{\pi}\, k_0^{-1/2} s^{-3/2} \exp\left(-\mu^2/4k_0 s\right). \tag{4}$$

Тогда

$$w^L = \frac{1}{2}(\pi k_0)^{-1/2} s^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,p)\exp(p^2/4k_0 - ip\xi)\,dp,$$
$$f(s,p) = \sqrt{p^2+c^2}\,[\varrho + (p^2+1)\sqrt{p^2+c^2}\,]^{-1}. \tag{5}$$

Подынтегральная функция имеет точки разветвления $p_* = \pm ic$ и полюсы:

$$p_1 = \pm i\left[1 + \frac{1}{2}\varrho(c^2-1)^{-1/2}s^{-1} + \frac{1}{4}\varrho^2(c^2-1)^{-2}s^{-2} + \ldots\right] \tag{6}$$

$$p_2 = \pm ic\left[1 - \frac{1}{2}\varrho^2 c^{-2}(c^2-1)^{-2}s^{-2} + \frac{1}{8}\varrho^4(c^2-1)^{-5}s^{-4} + \ldots\right]. \tag{7}$$

Проведя разрезы от точек ветвления $p_* = \pm ic$ до $\pm\infty$ соответственно и выбирая радикал $\sqrt{p^2+c^2}$ положительным при $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Im} p > c$, нетрудно установить, что $\operatorname{Re} f(s,p)$ является симметричной, а $\operatorname{Im} f(s,p)$ — антисимметричной функцией относительно мнимой оси. Интеграл (5) сходится в секторах $-\pi/4 < \arg p < \pi/4$ и $3\pi/4 < \arg p < 5\pi/4$. Вычислим его методом перевала с учетом вычетов. Седловая точка подынтегрального выражения $p = p_s = 2ik_0\xi$, а линия наиболее крутого спуска представляет собой прямую, параллельную вещественной оси. Координата седловой точки является функцией от ξ, поэтому при интегрировании могут встретиться следующие случаи.

а) Случай $p_s < p_1$. Интеграл (5) вычисляется по стандартной формуле метода перевала и имеет значение

$$w^L = w^L_s,$$
$$w^L_s = s^{-2}\sqrt{c^2 - 4k_0^2\xi^2}\,[\varrho + s(1-4k_0^2\xi^2)\sqrt{c^2-4k_0^2\xi^2}]^{-1}\exp(-sk_0\xi^2). \tag{8}$$

б) Случай $p_1 < p_s < p_2$, $p_2 < p_s < p_*$. К решению (8) следует прибавить вклад вычетов в полюсах $p = p_1$ и $p_1 = p_2$:

$$w^L = w^L_s + w^L_1 + w^L_2, \tag{9}$$

где

$$w^L_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/k_0 s}\,(s+\gamma)^{-1}(s-\delta)^{-1}\exp\{-s(\xi - 1/4k_0) - \gamma(\xi - 1/2k_0)\}, \tag{10}$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\varrho(c^2-1)^{-1/2}, \quad \delta = \frac{1}{2}\varrho(c^2-1)^{-3/2};$$

$$w^L_2 = -\varrho^2 c^{-1}(c^2-1)^{-3}\sqrt{\pi/k_0 s}\,(s^2-\alpha^2)^{-1}(s^2-\beta^2)^{-1}\exp\{-s(c\xi - c^2/4k_0) +$$
$$+ \alpha^2 s^{-1}(c\xi - c^2/2k_0)\}, \tag{11}$$
$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\varrho^2 c^{-2}(c^2-1)^{-2}, \quad \beta^2 = 3\varrho^2(c^2-1)^{-3}.$$

в) Случай $p_s > p_*$. В дополнение к предыдущим составляющим надо учесть интеграл по берегам $(p_s - 0, p_*)$ и $(p_*, p_s + 0)$ разреза мнимой оси (обход точки $p = p_*$ дает в результате нуль):

$$w^L = \operatorname{Re} w^L_s + w^L_1 + w^L_2 + w^L_k. \tag{12}$$

$\operatorname{Im} w_s^L = 0$ ввиду антисимметричности, а w_k^L представляется в виде

$$w_k^L = \varrho^{-1}\sqrt{4k_0^2\xi^2 - c^2}\, a^2 s^{-2}(s^2 + a^2)^{-1}\exp(-sk_0\xi^2), \qquad (13)$$
$$a^2 = \varrho^2(1 - 4k_0^2\xi^2)^{-2}(4k_0^2\xi^2 - c^2)^{-1}.$$

Обратное преобразование Лапласа выражений (8), (10), (11), (13) осуществляется просто при помощи таблиц и теоремы о свертке. Окончательное решение можно представить в виде:

$$w = \{a^{-2}(1 - 4k_0^2\xi^2)^{-1}[1 - \cos(aT)] - i^n\varrho^{-1}\sqrt{4k_0^2\xi^2 - c^2}[T -$$
$$- a^{-1}\sin(aT)]\}H(T) + k_0^{-1/2}(\gamma + \delta)^{-1}e^{-\gamma\left(\xi - \frac{1}{2k_0}\right)}\left\{\delta^{-1/2}e^{\delta T_1}\int\limits_0^{\sqrt{\delta T_1}} e^{-x^2}dx -\right.$$
$$\left. - \gamma^{-1/2}e^{-\gamma T_1}\int\limits_0^{\sqrt{\gamma T_1}} e^{x^2}dx\right\}H(T_1)H\left(\tau - \frac{1}{4k_0}\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\varrho^2 k_0^{-1/2}c^{-1}(c^2 - 1)^{-3}(\alpha\beta)^{-1}(\alpha^2 - \beta^2)^{-1}\left\{\alpha^{-1/2}\beta\left[e^{\alpha T_2}\int\limits_0^{\sqrt{\alpha T_2}} e^{-x^2}dx -\right.\right.$$
$$\left. - e^{-\alpha T_2}\int\limits_0^{\sqrt{\alpha T_2}} e^{x^2}dx\right] - \alpha\beta^{-1/2}\left[e^{\beta T_2}\int\limits_0^{\sqrt{\beta T_2}} e^{-x^2}dx -\right.$$
$$\left.\left. - e^{-\beta T_2}\int\limits_0^{\sqrt{\beta T_2}} e^{x^2}dx\right]\right\} H(T_2)H(\tau - c^2/4k_0), \qquad (14)$$

где

$$T = \tau - k_0\xi^2, \quad T_1 = \tau - \xi + 1/4k_0, \quad T_2 = \tau - c\xi + c^2/4k_0,$$
$$i = \sqrt{-1}, \quad n = 0 \text{ при } 2k_0\xi > c, \quad n = 1 \text{ при } 2k_0\xi < c,$$
$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Выражение (14) определяет интенсивности разрывов на фронтах волн и асимптотику за ними при любых ξ. Область применимости упомянутой асимптотики тем шире, чем меньше γ.

Сопоставление формулы (14) с результатами, полученными в [5] без учета влияния среды показывает, что на фронте нагрузки $\tau = k_0\xi^2$ интенсивность разрыва ускорения совпадает с интенсивностью, полученной без учета влияния среды; на фронте упругой волны $\tau = \xi - 1/4\,k_0$ интенсивность разрыва ускорения имеет порядок $T_1^{-1/2}$, как и в [5], но его амплитуда уменьшается по закону $e^{-\gamma\left(\xi - \frac{1}{2k_0}\right)}$. Начиная с сечения $\xi = \xi_1$, где скорость нагрузки становится равной скорости звука в среде, появляется еще третий фронт $\tau = c\xi - c^2/4k_0$. На этом фронте интенсивность на два порядка ниже, чем на фронте упругой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкович И. М., Уч. зап. ЛГУ, № 177, 194 (1954).
2. Peralta L. A., Raynor S., J. Acoust. Soc. America, **36**, 476 (1964).
3. Milenkovic V., Raynor S., J. Acoust. Soc. America, **39**, 556 (1966).
4. Алумяэ Н. А., В кн.: Тр. VI Всес. конфер. по теории оболочек и пластинок, М., 1966, с. 44.
5. Кутсер М. Э., Нигул У. К., ПММ, 33, 609 (1969).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/XII 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

В. АЛАДЬЕВ

ОДНА ТЕОРЕМА ТЕОРИИ СОТООБРАЗНЫХ СТРУКТУР

V. ALADJEV. ÜKS TEOREEM KARJEKUJULISTE STRUKTUURIDE TEOORIAST

V. ALADYEV. A THEOREM ON THE THEORY OF CELLULAR STRUCTURES

Настоящая заметка посвящена вопросам существования в однородных структурах, составленных из автоматов Мура, неконструируемых (НКФ) и стираемых (СТКФ) конфигураций и является непосредственным продолжением работ [1,3]. Все используемые в заметке понятия, определения и обозначения соответствуют [1–4]. Основной результат выражает следующая

теорема.

1. *Для того, чтобы структура* $\mathrm{ST}(2, \mathfrak{R}, S, S_0, \mathfrak{L}_{(1)})$ *имела* НКФ, *достаточно выполнения одного из условий:*

а) $$(\exists p)\,(\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i,j,T) \to (\mathfrak{S}(i,j,T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow (\mathfrak{S}(i,j,T) = S_p \,\&\, \mathfrak{S}(i+e, j+k, T) \neq S_p (e,k=\pm 1)));$$

б) $$(\exists p)\,(\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i,j,T) \to (\mathfrak{S}(i,j,T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow (\mathfrak{S}(i,j,T) = S_q \neq S_p \,\&\, \mathfrak{S}(i+1, j+1, T) = S_p));$$

в) $$\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i,j,T) \to (\mathfrak{S}(i,j,T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow (S_p \,\overline{\in}\, \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i,j,T));$$

г) $$(\exists p)\,(\mathfrak{L}_{(1)} : \mathfrak{S}_{\mathfrak{m}^2}(i,j,T) \to (\mathfrak{S}(i,j,T+1) = S_p \neq S_0) \longleftrightarrow (\mathfrak{S}(i+1, j+1, T) = S_q \,\&\, \mathfrak{S}(i-1, j-1, T) = S_p \neq S_q)).$$

2. *Структура может иметь* НКФ *или быть* СТКФ-*восприимчивой, не имея при этом* СТКФ. ★

★ В [1] Э. Мур доказал следующую важную теорему: *если в структуре существуют* СТКФ, *то в ней существуют и* НКФ. После сдачи настоящей заметки в редакцию автор познакомился с работой [5], в которой Дж. Майхилл доказал теорему, обратную теореме Мура [1]: *если в структуре существуют* НКФ, *то в ней существуют и* СТКФ. При этом понятие «конфигурации» у Майхилла отличается от муровского. Используя теорему нашей заметки, можно показать, что *в смысле Мура теорема Майхилла* [5] *в общем случае неверна.* Для этого, очевидно, достаточно построить такую