EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.13

Ю. КАЯРИ

ОБ УРАВНИВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

1. Предположим, что элементы матрицы $B = \|b_{ij}\|$ $(i = 1, \ldots, m;$ $j = 1, \ldots, n)$ являются результатами некоторых исследований, имеющих случайные погрешности и что истинные неизвестные нам значения a_{ij} исследуемых величин удовлетворяют требованиям:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = N_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = M_j \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где правые части равенств (N_i и M_j) известны точно.

В таких случаях обычно необходимо произвести корректировку результатов исследования b_{ij}, т. е. заменить последние на оценки c_{ij} так, чтобы удовлетворялись уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = N_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$
$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} = M_j \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

и матрицы $C = \|c_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ были бы сходны в каком-то смысле. Такая операция часто называется уравниванием [1].

Задача уравнивания возникает, например, при исследовании существующего и при прогнозировании будущего расселения городского населения [2–7], которое определяется количеством жителей a_{ij}, проживающих в районе i и работающих в районе j рассматриваемого города. В этом случае N_i — количество жителей, проживающих в районе i, и M_j — количество рабочих мест в районе j. Естественно считать, что здесь уравнения (1) удовлетворены.

Обследование выборочным методом существующего в городе расселения дает приближенные оценки b_{ij} для истинных величин a_{ij}.

При прогнозировании величин a_{ij} получаемые оценки b_{ij} будущего расселения в планируемом городе также являются приближенными.

С другой стороны, величины N_i и M_j нетрудно определить точно как в существующем, так и в планируемом городе.

В приведенных примерах результатом некоторого исследования (статистическое обследование, прогнозирование) является матрица $B = \|b_{ij}\|$ с элементами, имеющими случайные погрешности и, очевидно, не удовлетворяющим требованиям (1). Для дальнейшего же использования полученных результатов необходимо произвести уравнивание матриц B.

К настоящему времени выработан ряд методов для уравнивания случайных матриц, краткий обзор которых дан в [4]. Отдельные методы различаются не только вычислительными процедурами, но и самой постановкой задачи. При замене матрицы B матрицей C, удовлетворяющей условиям (2), сходство этих матриц понимается по-разному. Критерием сходства служат, например, величины:

$$\alpha = \sum_{ij} c_{ij} \ln \frac{b_{ij}}{c_{ij}}, \tag{3}$$

$$\beta = \sum_{ij} |c_{ij} - b_{ij}|, \tag{4}$$

$$\gamma = \sum_{ij} \frac{|c_{ij} - b_{ij}|}{b_{ij}}, \tag{5}$$

$$\varepsilon = \sum_{ij} (c_{ij} - b_{ij})^2. \tag{6}$$

Выбор той или другой из приведенных величин для оценки сходства матриц B и C, очевидно, зависит от конкретного содержания рассматриваемой задачи. Наиболее распространенным критерием является величина α, которая максимизируется при помощи известного итерационного процесса [4, 5, 7, 8]. В некоторых случаях минимизируется величина β или γ [4, 6]. Метод наименьших квадратов (минимизация величины ε) до сих пор не нашел применения в практических задачах уравнивания случайных матриц. Недостатком этого метода считается громоздкость вычислительного процесса [4]. Используемый для минимизации величины ε при условиях (2) метод множителей Лагранжа действительно приводит к громоздкой системе линейных уравнений. Но некоторые преобразования в этой системе позволяют существенно сократить объем вычислительной работы при ее решении.

Ниже приводится метод уравнивания случайных матриц, основанный на принципе максимального правдоподобия, который приводит к минимизации суммы квадратов отклонений ε.

2. Пусть элементы матрицы B являются нормально распределенными случайными величинами $b_{ij} \in N(a_{ij}, \sigma\sqrt{q_{ij}})$, так что $M(b_{ij}) = a_{ij}$ — истинные значения исследуемых величин; $D(b_{ij}) = \sigma^2 q_{ij}$, где q_{ij} — беса (положительные числа), характеризующие точность элементов b_{ij}. Тогда применение принципа максимального правдоподобия (см. [1]) для уравнивания матрицы B приводит к задаче нахождения такой матрицы C, чтобы

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_{ij}} (c_{ij} - b_{ij})^2 = \min! \tag{7}$$

при условиях, что

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = N_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \\ &\sum_{i=1}^{m} c_{ij} = M_j \qquad (j = 1, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{8}$$

В силу того, что уравнения (2) являются линейно зависимыми, в системе (8) отсутствует уравнение $\sum_{i=1}^{m} c_{in} = M_n$, которое следует из остальных $m+n-1$ уравнений.

Введя обозначения: $c_{ij} - b_{ij} = x_{ij}$, $N_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = b_i$ и $M_j - \sum_{i=1}^{m} b_{ij} = a_j$, задачу (7)—(8) можно переписать в более удобном виде.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_{ij}} x_{ij}^2 = \min! \tag{9}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= a_j \quad (j = 1, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{10}$$

3. Применяя для нахождения относительного минимума функции (9) метод множителей Лагранжа, получим следующую систему линейных уравнений:

$$x_{ij} + q_{ij}\lambda_i + q_{ij}\mu_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n-1), \tag{11}$$

$$x_{in} + q_{in}\lambda_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j \quad (j = 1, \ldots, n-1). \tag{14}$$

Эта система состоит из $mn + m + n - 1$ уравнений и содержит столько же неизвестных x_{ij}, λ_i, μ_j. Непосредственное решение этой системы уравнений уже при $m = n = 20$ практически неосуществимо.

Суммируя уравнения (11) и (12) по j и по i соответственно, получим

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\lambda_i + \sum_{j=1}^{n-1} q_{ij}\mu_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} q_{ij}\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} q_{ij}\mu_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1), \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{in} + \sum_{i=1}^{m} q_{in}\lambda_i = 0. \tag{17}$$

Учитывая уравнения (13) и (14), полученная система уравнений принимает вид

$$b_i + \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\lambda_i + \sum_{j=1}^{n-1} q_{ij}\mu_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{18}$$

$$a_j + \sum_{i=1}^{m} q_{ij}\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} q_{ij}\mu_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1), \tag{19}$$

$$a_n + \sum_{i=1}^{m} q_{in}\lambda_i = 0. \tag{20}$$

Здесь последнее уравнение (20) выражается линейно через предыдущие уравнения (18) и (19), поэтому его можно исключить из рассмотрения. Таким образом остается $m + n - 1$ уравнений для определения $m + n - 1$ неизвестных λ_i и μ_j.

Решение этой системы уравнений целесообразно произвести в матричной форме. Используем следующие обозначения:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{matrix}\right\| = a, \quad \left\|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right\| = b, \quad \left\|\begin{matrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{matrix}\right\| = \mu, \quad \left\|\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{matrix}\right\| = \lambda, \quad \left\|\begin{matrix} q_{1n} \\ q_{2n} \\ \vdots \\ q_{mn} \end{matrix}\right\| = q,$$

$$\left\|\begin{matrix} q_{11} q_{12} & \dots & q_{1n-1} \\ q_{21} q_{22} & \dots & q_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} q_{m2} & \dots & q_{mn-1} \end{matrix}\right\| = Q, \quad \left\|\begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} q_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{n} q_{2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=1}^{n} q_{mj} \end{matrix}\right\| = Q_E,$$

$$\left\|\begin{matrix} \sum_{i=1}^{m} q_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{m} q_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^{m} q_{in-1} \end{matrix}\right\| = Q_I.$$

Система уравнений (18), (19) выражается теперь в матричной записи следующим образом:

$$\begin{cases} b + Q_E\lambda + Q\mu = 0, \\ a + Q^{\mathrm{T}}\lambda + Q_I\mu = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Из второго уравнения находим

$$\mu = -Q_I^{-1}a - (QQ_I^{-1})^{\mathrm{T}}\lambda. \tag{22}$$

Подставляя выражение вектора μ в первое уравнение, получим

$$\lambda = (Q_E - QQ_I^{-1}Q^{\mathrm{T}})^{-1}(QQ_I^{-1}a - b). \tag{23}$$

Уравнивание матрицы B методом наименьших квадратов осуществляется теперь по следующей схеме. По формуле (23) вычисляют координаты вектора λ. Подставляя найденный вектор λ в формулу (22), определяют вектор μ. Из уравнений (11) и (12) находят поправки x_{ij} ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$) и, учитывая введенное обозначение $c_{ij} - b_{ij} = x_{ij}$, получают элементы матрицы C, удовлетворяющие условиям (8) и минимизирующие при этом функцию (7).

Очевидно, основная вычислительная работа описанного метода уравнивания состоит в обращении матрицы $Q_E - QQ_I^{-1}Q^{\mathrm{T}}$.

4. Покажем, что матрица $Q_E - QQ_I^{-1}Q^{\mathrm{T}}$ является положительно определенной. Используем для этого оценки Гершгорина, дающие информацию о расположении собственных значений матрицы (см. [9], стр. 132).

Пусть A_E и B — вещественные матрицы, причем A_E — диагональная матрица и B — матрица с неотрицательными элементами. Тогда оценки

Гершгорина определяют нижнюю границу собственных значений t матрицы $A_E - B$ в виде

$$\min_i (a_{ii} - \sum_{j=1}^{m} b_{ij}) \leqslant t \tag{24}$$

или в матричной записи

$$\min_i e_i^{\mathrm{T}} (A_E - B)\, 1_m \leqslant t, \tag{25}$$

где e_i — i-й столбец m-мерной единичной матрицы и $\mathbf{1}_m$ — m-мерный вектор, все компоненты которого равны единице.

Таким образом, собственные значения v матрицы $Q_E - QQ_I^{-1}Q^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют неравенству

$$v \geqslant \min_i e_i^{\mathrm{T}} (Q_E - QQ_I^{-1}Q^{\mathrm{T}})\, 1_m = \min_i e_i^{\mathrm{T}} q > 0, \tag{26}$$

так как $Q_E \mathbf{1}_m = Q\mathbf{1}_{n-1} + q$, $Q^{\mathrm{T}} \mathbf{1}_m = Q_I \mathbf{1}_{n-1}$ и $q_{ij} > 0$.

Из неравенства (26) следует, что все собственные значения матрицы $Q_E - QQ_I^{-1}Q^{\mathrm{T}}$ положительны, и тем самым эта матрица является положительно определенной. Последнее обстоятельство утверждает существование обратной матрицы $(Q_E - QQ_I^{-1}Q^{\mathrm{T}})^{-1}$ и позволяет для ее нахождения эффективно применять метод квадратных корней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, М., 1958.
2. Старинкевич А. К., Заблоцкий Г. А., В сб.: Городской транспорт, Киев, 1967.
3. Дыпкин А. Г., Мовчан Э. Л., В сб.: Применение математических методов и ЭВМ в градостроительстве, Киев, 1966.
4. Бубес Э. Я., Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та, **67**, 248 (1966).
5. Брегман Л. М., Журн. выч. матем. и матем. физики, 7, № 1 (1967).
6. Амбарян С. Л., Некоторые модели и алгоритмы оптимального развития городского пассажирского транспорта и обработки статистической информации, Автореф. дисс. канд. техн. н.; М., 1969.
7. Dieter K. H., J. City Planning Division, Proc. Amer. Soc. Civil Engng, **88**, No. CP1 (1962).
8. Mosteller F., J. Amer. Statist. Assoc., **63**, No. 321 (1968).
9. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/XII 1969

J. KAJARI

JUHUSLIKE MAATRIKSITE SILUMISEST

Esitatakse juhuslike maatriksite silumise meetod. Seejuures eeldatakse, et vaatluste tulemusena saadud maatriksi elementide mõõtmisvead on normaalselt jaotatud juhuslikud suurused ning et selle maatriksi ridade ja veergude summad on antud täpselt. Sel juhul tekib järgmine probleem: korrigeerida maatriksi elementide väärtused selliselt, et saadud maatriksi ridade ja veergude summad oleksid antutega võrdsed. Kõnesolev meetod põhineb suurima tõepärasuse printsiibil. Peamine arvutustöö tema rakendamisel seisneb teatud maatriksi pööramises. Näidatakse vastava pöördmaatriksi olemasolu ja positiivne määratus.

I. KAJARI

ON THE EQUALIZATION OF RANDOM MATRICES

A method for the equalization of random matrices is presented. It is assumed that the elements of a given matrix are subject to normal independent errors and the sums of the rows and the columns of the matrix are given exactly. In that case, the following problem arises: to correct the elements of the matrix so that sums of the rows and the columns of the obtained matrix are equal to the given ones. On the basis of the maximum-likelihood principle, a method for the equalization of random matrices is constructed. The computational scheme of the method contains an inversion of a matrix. The existence and the positive definiteness of the inverted matrix are shown.