EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.07

П. КАРД

К ТЕОРИИ ОТРЕЗАЮЩЕГО ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО СВЕТОФИЛЬТРА

Выведены новые формулы для коэффициента пропускания непоглощающего неравнослойного отрезающего интерференционного светофильтра, удобные для проведения конкретного синтеза.

Введение

Как известно (см., напр., [1]), интерференционный отрезающий светофильтр может быть выполнен в виде периодической тонкослойной симметричной пленки, заключенной между средами с неравными показателями преломления. Выгоднее всего, если одной из ограничивающих сред является воздух; однако вначале для общности мы этого не предполагаем.

Коэффициент пропускания D_f периодической симметричной пленки, нахсдящейся между средами с показателями преломления n_0 и n, можно выразить формулой

$$D_f^{-1} = D_0^{-1} + \frac{\sin^2 m\psi}{\sin^2 \psi} (\xi \operatorname{ch} 2v_0 + \eta \operatorname{sh} 2v_0) (\xi \operatorname{ch} 2v + \eta \operatorname{sh} 2v), \tag{1}$$

где m есть число периодов в пленке,

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2} \ln n_0, \\ v &= \frac{1}{2} \ln n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$D_0 = \operatorname{ch}^{-2}(v - v_0) \tag{3}$$

есть коэффициент пропускания на границе сред в случае отсутствия пленки; величины ψ, ξ, η характеризуют полупериод пленки (см. ниже). Формулы (2) относятся в первую очередь к случаю нормального падения света; однако ими можно пользоваться и в случае наклонного падения, если показатели преломления в них заменить так наз. эффективными показателями преломления (см., напр., [2]). Вид формул (1) и (3) не зависит тогда от угла падения.

Подробный вывод формулы (1) (для случая $n_0 = 1$) дан в статье [1]. Там же показано, что величины ψ, η, ξ определяются через характеристики полупериода

$$\left.\begin{aligned} a &= r/d, \\ b &= 1/d, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где r и d — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания полупериода (при условии, что показатели преломления — действительные или эффективные — ограничивающих его сред равны единице), следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\cos\psi &= \frac{1}{2}\left(b^2+b^{*2}-a^2-a^{*2}\right),\\ \eta &= \frac{1}{2i}\left(b^2-b^{*2}+a^2-a^{*2}\right),\\ \xi &= \frac{1}{i}\left(ab-a^*b^*\right).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Отсюда видно, что ξ и η всегда вещественны, тогда как ψ может быть как вещественным, так и комплексным. Под полупериодом здесь подразумевается 1-й полупериод, т. е. последовательность слоев, идущих в направлении падения света от края периода до его середины.

Преобразование основной формулы

Обозначая

$$\left.\begin{aligned}p_1 &= \frac{1}{2}\left(b+b^*+a+a^*\right),\\ q_1 &= \frac{1}{2}\left(b+b^*-a-a^*\right),\\ p_2 &= \frac{1}{2i}\left(b-b^*+a-a^*\right),\\ q_2 &= \frac{1}{2i}\left(b-b^*-a+a^*\right),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

так что

$$\cos\psi = -1+2p_1q_1 = 1-2p_2q_2, \tag{7}$$

$$\eta = p_1p_2+q_1q_2, \tag{8}$$

$$\xi = p_1p_2-q_1q_2, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}p_1q_1 &= \cos^2\frac{\psi}{2},\\ p_2q_2 &= \sin^2\frac{\psi}{2},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

перепишем формулу (1) в виде:

$$D_f^{-1} = D_0^{-1} + \frac{\sin^2 m\psi}{\sin^2\psi}\left(p_1p_2e^{2v_0}-q_1q_2e^{-2v_0}\right)\cdot\left(p_1p_2e^{2v}-q_1q_2e^{-2v}\right). \tag{11}$$

Далее выразим величины p_1, q_1, p_2, q_2 через параметры полупериода. Воспользуемся для этого формулами, известными из общей теории анализа интерференционных пленок (см. [3]):

$$\begin{aligned}a &= \sum \operatorname{xh} v_{i1}\operatorname{xh} v_{12}\ldots\operatorname{xh} v_{N-1,N}\operatorname{xh} v_{Ns}\exp\left[-i\left(\pm\alpha_1\pm\alpha_2\pm\ldots\pm\alpha_N\right)\right],\\ b &= \sum \operatorname{xh} v_{i1}\operatorname{xh} v_{12}\ldots\operatorname{xh} v_{N-1,N}\operatorname{xh} v_{Ns}\exp\left[i\left(\pm\alpha_1\pm\alpha_2\pm\ldots\pm\alpha_N\right)\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $1, 2, \ldots, N$ — индексы слоев в пленке (нумерация идет в направлении падения света); индексы i и s относятся к исходной среде и подложке;

$$v_{jk} = v_j - v_k = \frac{1}{2}\ln\frac{n_j}{n_k}, \tag{13}$$

где n — показатель преломления;

$$\alpha_j = kn_jh_j = g_j\alpha, \tag{14}$$

где $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, h_j — толщина j-го слоя, α — безразмерная спектральная переменная, g_j — безразмерная толщина слоя, равная числу четвертей той длины волны, для которой $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Наконец, xh означает в формулах (12) sh или ch, сумма берется в первой из них по всем 2^N комбинациям выбора sh и ch с нечетным числом sh, а во второй — с четным числом sh. Знаки в экспоненте определяются правилом: α_1 имеет плюс, если $\operatorname{xh} v_{i1}$ есть $\operatorname{ch} v_{i1}$, и минус, если $\operatorname{xh} v_{i1}$ есть $\operatorname{sh} v_{i1}$; знаки α_k и α_{k+1} одинаковы, если $\operatorname{xh} v_{k,k+1}$ есть $\operatorname{ch} v_{k,k+1}$, и различны, если $\operatorname{xh} v_{k,k+1}$ есть $\operatorname{sh} v_{k,k+1}$.

Заметим, что формулы (12) верны как для нормального, так и для наклонного падения света. В последнем случае в формуле (13) следует брать эффективные показатели преломления, а формулу (14) следует заменить следующей:

$$\alpha_j = \alpha g_j \cos \vartheta_j, \tag{15}$$

где ϑ_j — угол преломления в j-м слое.

Подставляя формулы (12) в выражения (6) и учитывая, что $v_i = v_s = 0$, получим следующий результат:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= e^{v_N - v_1}(C_1 + S_1), \\ q_1 &= e^{-v_N + v_1}(C_1 - S_1), \\ p_2 &= e^{-v_N - v_1}(C_2 + S_2), \\ q_2 &= e^{v_N + v_1}(C_2 - S_2), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где N означает теперь число слоев в полупериоде,

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum \operatorname{xh} v_{12} \operatorname{xh} v_{23} \ldots \operatorname{xh} v_{N-1,N} \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_{N-1} + \alpha_N), \\ C_2 &= \sum \operatorname{xh} v_{12} \operatorname{xh} v_{23} \ldots \operatorname{xh} v_{N-1,N} \sin(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_{N-1} + \alpha_N) \end{aligned} \tag{17}$$

и

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \operatorname{xh} v_{12} \operatorname{xh} v_{23} \ldots \operatorname{xh} v_{N-1,N} \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_{N-1} - \alpha_N), \\ S_2 &= -\sum \operatorname{xh} v_{12} \operatorname{xh} v_{23} \ldots \operatorname{xh} v_{N-1,N} \sin(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_{N-1} - \alpha_N). \end{aligned} \tag{18}$$

В формулах (17) сумма берется по всем 2^{N-2} комбинациям выбора sh и ch с четным числом sh, а в формулах (18) по всем 2^{N-2} комбинациям с нечетным числом sh. Знаки определяются уже известным правилом: знаки α_k и α_{k+1} одинаковы или различны в зависимости от того, есть ли $\operatorname{xh} v_{k,k+1}$ $\operatorname{ch} v_{k,k+1}$ или $\operatorname{sh} v_{k\,k+1}$.

Далее, подставляя выражения (16) в формулы (7), (10) и (11), находим

$$\cos\psi = -1 + 2(C_1^2 - S_1^2) = 1 - 2(C_2^2 - S_2^2), \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1^2 - S_1^2 &= \cos^2\frac{\psi}{2}, \\ C_2^2 - S_2^2 &= \sin^2\frac{\psi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned} D_f^{-1} = D_0^{-1} + \frac{4\sin^2 m\psi}{\sin^2\psi}\,[\,(C_1C_2 + S_1S_2)\operatorname{sh} 2(v_0 - v_1) + {} \\ + (C_1S_2 + S_1C_2)\operatorname{ch} 2(v_0 - v_1)\,]\,[\,(C_1C_2 + S_1S_2)\operatorname{sh} 2(v - v_1) + {} \\ + (C_1S_2 + S_1C_2)\operatorname{ch} 2(v - v_1)\,]. \end{aligned} \tag{21}$$

Наконец, чтобы привести полученную формулу для D_f к окончательному виду, следует различать следующие случаи.

1) ψ вещественно и не равно ни 0, ни π, т. е. $|\cos\psi| < 1$. Тогда $C_1{}^2 - S_1{}^2 > 0$ и $C_2{}^2 - S_2{}^2 > 0$. Следовательно, можно положить

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_1}{C_1} &= \operatorname{th} U_1 \\ \frac{S_2}{C_2} &= \operatorname{th} U_2. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Тогда, учитывая формулы (20), получаем (21) в виде:

$$D_f^{-1} = D_0^{-1} + \sin^2 m\psi \operatorname{sh}(U_1 + U_2 - 2v_1 + 2v_0)\operatorname{sh}(U_1 + U_2 - 2v_1 + 2v). \tag{23}$$

2) ψ комплексно и $\cos\psi < -1$. Тогда положим

$$\psi = \pi - i\gamma, \tag{24}$$

и так как тогда

$$\left.\begin{aligned} S_1^2 - C_1^2 &= \operatorname{sh}^2\frac{\gamma}{2}, \\ C_2^2 - S_2^2 &= \operatorname{ch}^2\frac{\gamma}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

то можно положить

$$\left.\begin{aligned} \frac{C_1}{S_1} &= \operatorname{th} U'_1, \\ \frac{S_2}{C_2} &= \operatorname{th} U_2. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

В результате находим

$$D_f^{-1} = D_0^{-1} + \operatorname{sh}^2 m\gamma \operatorname{ch}(U'_1 + U_2 - 2v_1 + 2v_0)\operatorname{ch}(U'_1 + U_2 - 2v_1 + 2v). \tag{27}$$

3) ψ мнимо, т. е. $\cos\psi > 1$. Тогда, положив

$$\psi = i\gamma, \tag{28}$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} C_1^2 - S_1^2 &= \operatorname{ch}^2\frac{\gamma}{2}, \\ S_2^2 - C_2^2 &= \operatorname{sh}^2\frac{\gamma}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

и если

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_1}{C_1} &= \operatorname{th} U_1, \\ \frac{C_2}{S_2} &= \operatorname{th} U'_2, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

то

$$D_f^{-1} = D_0^{-1} + \operatorname{sh}^2 m\gamma \operatorname{ch}(U_1 + U'_2 - 2v_1 + 2v_0)\operatorname{ch}(U_1 + U'_2 - 2v_1 + 2v). \tag{31}$$

Остаются промежуточные случаи.

4) Если $\cos\psi = 1$, то

$$\left.\begin{aligned} C_1^2 - S_1^2 = 1, \\ C_2^2 - S_2^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\frac{S_1}{C_1} = \operatorname{th} U_1 \tag{33}$$

и

$$D_f^{-1} = D_0^{-1} + 4m^2 C_2^2 \exp[\pm 2(U_1 - 2v_1 + v_0 + v)], \tag{34}$$

где двойной знак соответствует двойному знаку в неравенстве $C_2 S_2 \gtrless 0$.

5) Если $\cos\psi = -1$, то

$$\left.\begin{aligned} C_1^2 - S_1^2 = 0, \\ C_2^2 - S_2^2 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\frac{S_2}{C_2} = \operatorname{th} U_2 \tag{36}$$

и

$$D_f^{-1} = D_0^{-1} + 4m^2 C_1^2 \exp[\pm 2(U_2 - 2v_1 + v_0 + v)], \tag{37}$$

где двойной знак соответствует двойному знаку в неравенстве $C_1 S_1 \gtrless 0$.

Заключительные замечания

Формулы (23), (27), (31), (34) и (37) выражают коэффициент пропускания фильтра в зависимости от показателей преломления n_0 и n ограничивающих сред (через величины v_0 и v), от показателя преломления n_1 крайних слоев периода (через величину v_1) и от величин ψ, U_1, U_2, U_1', U_2', зависящих, согласно формулам (19), (20), (22), (26), (30), (33) и (36), от величин C_1, C_2, S_1, S_2. Последние, согласно формулам (17) и (18), зависят от толщин слоев полупериода и от отношений показателей преломления этих слоев (см. формулу (13)). Удобство выведенных формул для конкретного синтеза фильтра обусловлено в значительной мере именно тем, что величины C_1, C_2, S_1, S_2 зависят только от отношений показателей преломления слоев полупериода, но не от самих показателей преломления. Это обстоятельство позволяет с большей свободой удовлетворять требованиям, налагаемым в интересах синтеза на величины C_1, C_2, S_1, S_2, не заботясь о выборе конкретных веществ. Лишь после того, как оптимальные значения отношений показателей преломления найдены, возникает задача подбора конкретных веществ; решение ее облегчается, однако, тем, что показатель преломления первого слоя полупериода, определяющий согласно найденным отношениям показатели преломления и всех остальных слоев, является независимым от C_1, C_2, S_1, S_2 параметром.

Область прозрачности отрезающего фильтра образуют те части спектра, где ψ вещественно и $|\cos\psi| < 1$ (см. выше случай 1), а область непрозрачности — те части спектра, где ψ мнимо или комплексно и $|\cos\psi| > 1$ (см. выше случаи 2 и 3). Пусть, например, фильтр должен быть прозрачен в длинноволновой и непрозрачен в коротковолновой области. Тогда при изменении α от 0 до некоторого значения α' $\cos\psi$ должен изменяться от $+1$ до -1, а при $\alpha > \alpha'$ должно быть $\cos\psi < -1$.

Важным качеством отрезающего светофильтра является, как известно, резкость перехода из области прозрачности в область непрозрачности. Для этого необходимо, чтобы уменьшение D_f при приближении к границе α' области прозрачности происходило возможно медленнее, с тем, чтобы на самой границе падение было возможно быстрее. Из формулы (23) видно, что $D_f \gtreqless D_0$ в зависимости от

$$\operatorname{sh}(U_1+U_2-2v_1+2v_0)\operatorname{sh}(U_1+U_2-2v_1+2v) \lesseqgtr 0. \tag{38}$$

Следовательно, если обозначим то значение α, при котором

$$\operatorname{sh}(U_1+U_2-2v_1+2v_0)\operatorname{sh}(U_1+U_2-2v_1+2v)=0, \tag{39}$$

через α'', то переход в область непрозрачности будет тем более резким, чем меньше разность $\alpha'-\alpha''$. Наибольшая резкость достигается, очевидно, при $\alpha'-\alpha''=0$. Оставляя здесь вопрос о реализуемости этого условия открытым, найдем соотношения, которым должны удовлетворять в этом случае величины C_1 и S_1. Из формулы (37), где $\alpha=\alpha'$, в случае $\alpha'=\alpha''$ вытекает, что $C_1=0$, а из формулы (35) тогда следует, что $S_1=0$. Но эти условия еще недостаточны. В самом деле, так как согласно формуле (19)

$$\left(\frac{d\cos\psi}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha'} = 4\left(C_1\frac{dC_1}{d\alpha}-S_1\frac{dS_1}{d\alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=\alpha'} = 0, \tag{40}$$

то при

$$\left(\frac{d^2\cos\psi}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha'} \neq 0$$

мы будем иметь в точке $\alpha=\alpha'=\alpha''$ минимум $\cos\psi$, равный -1, а не переход к значениям, меньшим -1. Следовательно, нужно потребовать, чтобы точка $\alpha=\alpha'=\alpha''$ была точкой перегиба $\cos\psi$, т. е. чтобы $\left(\frac{d^2\cos\psi}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha'}=0$. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы $\left(\frac{dC_1}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{dS_1}{d\alpha}\right)^2$. Итак, условием для $\alpha'=\alpha''$ являются три равенства:

$$\left.\begin{aligned} C_1&=0,\\ S_1&=0,\\ \left(\frac{dC_1}{d\alpha}\right)^2&=\left(\frac{dS_1}{d\alpha}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Вопрос о реализуемости этого варианта вместе с другими вопросами конкретного синтеза отрезающего светофильтра будет подробно рассмотрен в следующих статьях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кard P., В кн.: Osakeste ja valguse maailmast (в печати).
2. Кард П., Изв. АН ЭССР, Сер. техн. и физ.-матем. н., **9**, 26 (1960).
3. Кард П. Г., Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок (в печати).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
26/IX 1969

P. KARD

ASTMELISE INTERFERENTS-VALGUSFILTRI TEOORIAST

Astmelise interferents-valgusfiltri moodustab sümmeetriline perioodiline õhukeste kihtide süsteem, mis asetseb kahe mittevõrdsete murdumisnäitajatega n_0 ja n keskkonna vahel. Niisuguse filtri läbilaskvuse koefitsient D_f avaldub poolperioodi iseloomustavate suuruste ψ, ξ, η (vt. valemid (4) ja (5), kus r ja d on poolperioodi amplituudsed peegeldumise ja läbilaskvuse koefitsiendid) kaudu valemiga (1), kus v ja v_0 on defineeritud valemiga (2), m on filtri perioodide arv ja D_0 — läbilaskvuse koefitsient ilma filtrita. Poolperiood on vaakuumiga mõlemalt poolt piiratud valguse langemise suunas võetud esimene poolperiood. Sellekohaste teisenduste abil saab valemile (1) anda konkreetse sünteesi teostamiseks sobivama kuju (23), (27), (31), (34) või (37), olenevalt sellest, kas $|\cos\psi| < 1$, $\cos\psi < -1$, $\cos\psi > 1$, $\cos\psi = 1$ või $\cos\psi = -1$. Nendes valemites esinevad suurused U_1, U_2, U_1', U_2' on defineeritud vastavalt valemitega (22), (26), (30), (33) või (36) ja viimastes esinevad suurused C_1, C_2, S_1, S_2 valemitega (17) ja (18). N on poolperioodi kihtide arv; a_j on defineeritud valemiga (14), kus k on lainearv; n_j ja h_j on j-nda kihi murdumisnäitaja ja paksus; $v_{k,\,k+1}$ on defineeritud valemiga (13), xh tähendab ch või sh. Summa võetakse valemis (17) üle kõikide ch ja sh kombinatsioonide, milles sh arv on paaris, ja valemis (18) üle kõikide ch ja sh kombinatsioonide, milles sh arv on paaritu. Märgid sin ja cos argumentides määrab eeskiri: a_k ja a_{k+1} märgid on ühesugused või erinevad selle järgi, kas xh $v_{k,\,k+1}$ on ch $v_{k,\,k+1}$ või sh $v_{k,\,k+1}$. Kõik valemid kehtivad mitte ainult valguse normaalse langemise, vaid ka kaldu langemise juhul, selle vahega, et kõik murdumisnäitajad tuleb asendada efektiivsete murdumisnäitajatega ja suurused a_j defineerida valemiga (15), kus ϑ_j on murdumisnurk. Valemid (41) tingivad läbilaskvuse koefitsiendi võimalikult järsu muutumise suure ja väikese läbilaskvusega piirkondade piiril.

P. KARD

ON THE THEORY OF A CUT-OFF INTERFERENCE LIGHT FILTER

A cut-off interference light filter is formed by a symmetrical periodical stack of thin layers, placed between two media with unequal refractive indices, n_0 and n. The transmittance, D_f, of such a filter is expressed by the formula (1) in terms of characteristic quantities ψ, ξ, η of the half-period (s. formulae (4) and (5), where r and d denote amplitude reflectance and transmittance of the half-period). In the formula (1), v and v_0 are defined by the formula (2), m denoting the number of periods in the filter and D_0 the transmittance when the filter is absent. As the half-period, the first (in the direction of the incidence of light) vacuum-bounded half-period is meant. By means of some appropriate transformations, the formula (1) can be put into a more convenient form (23), (27), (31), (34), or (37), according to the (un)equalities $|\cos\psi| < 1$, $\cos\psi < -1$, $\cos\psi > 1$, $\cos\psi = 1$ or $\cos\psi = -1$. In these formulae the quantities U_1, U_2, U_1', U_2' are defined by the formulae (22), (26), (30), (33), or (36), respectively, where C_1, C_2, S_1, S_2 are defined by the formulae (17) and (18). N denotes there the number of layers in the half-period, a_j is defined by the formula (14), where k is the wave number, n_j the refractive index of the j-th layer, and h_j the thickness of the j-th layer; $v_{k,\,k+1}$ is defined by the formula (13), xh means ch or sh and the summation runs over all ch and sh combinations with an even number of sh's in (17) and an odd number in (18). The signs in the arguments of the sines and cosines are to be chosen as follows: the signs of a_k and a_{k+1} are the same, when xh $v_{k,\,k+1}$ is ch $v_{k,\,k+1}$, and opposite, when xh $v_{k,\,k+1}$ is sh $v_{k,\,k+1}$. All formulae are valid in the first place when incidence is normal; yet they can be also used in the case of oblique incidence; in this case, all refractive indices are to be taken as effective ones, and a_j is redefined according to the formula (15) with ϑ_j as the angle of refraction. The formulae (41) put forward the condition that the filter should have as great a steepness as possible between the regions of high and low transmittance.