EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.05

Э. РАЙК

НЕРАВЕНСТВА В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Рассмотрим действительную функцию $f(x, \xi)$, где x является n-мерным вектором, а ξ — m-мерным случайным вектором с конечным математическим ожиданием $E\{\xi\}$. При минимизации функции $f(x, \xi)$ на некотором множестве Q можно сформулировать три типа задач. В задачах первого типа требуется найти значение вектора $\hat{x}$, на котором функция $f(x, \xi)$ является в среднем минимальной,

$$\min_{x \in Q} E\{f(x, \xi)\} = E\{f(\hat{x}, \xi)\}, \quad \hat{x} \in Q. \tag{1}$$

В задачах второго типа предполагается, что для любого вектора $\xi \in R = \{\xi : p(\xi) > 0\}$ ($p(\xi)$ — плотность распределения вектора ξ) найдется вектор $\bar{x}(\xi) \in Q$ такой, что $f(\bar{x}(\xi), \xi) = \min\limits_{x \in Q} f(x, \xi)$ и требуется найти значение

$$E\{\min_{x \in Q} f(x, \xi)\} = E\{f(\bar{x}(\xi), \xi)\}, \tag{2}$$

т. е. среднее значение минимизирующей функции. С приведенными выше формулировками тесно связан и третий тип задач:

$$\min_{x \in Q} f(x, E\{\xi\}) = f(\bar{x}(E\{\xi\}), E\{\xi\}), \ \bar{x}(E\{\xi\}) \in Q. \tag{3}$$

Здесь случайный вектор ξ в функции $f(x, \xi)$ заменен его математическим ожиданием $E\{\xi\}$, после чего задача стала детерминированной. Иногда такую процедуру называют решением стохастической задачи на уровне математических ожиданий.

Приведем некоторые простейшие условия существования решения в названных задачах:

1) множество Q ограничено и замкнуто;

2) функция $f(x, \xi)$ непрерывна по (x, ξ) и ограничена для $x \in Q$, $\xi \in R$. Отметим еще, что можно отказаться от требования ограниченности множества Q, требуя дополнительно, чтобы $|f(x, \xi)| \to \infty$, при $\|x\| \to \infty$, для любого $\xi \in R$. Тем самым можно рассматривать и задачи, где множество Q совпадает со всем пространством.

Перейдем к рассмотрению связей между задачами. Хотя для приведенных выше задач О. Л. Мангасаряном проведено исследование [1], нам полезно (в целях полноты) повторить это раньше, чем перейти к другим задачам, не рассмотренным в [1]. Заметим сначала, что поскольку для любого вектора ξ и $\hat{x} \in Q$ $f(\hat{x}, \xi) \geqslant \min_{x \in Q} f(x, \xi)$, то без всяких дополнительных предположений имеем

$$\min_{x \in Q} E\{f(x, \xi)\} = E\{f(\hat{x}, \xi)\} \geqslant E\{\min_{x \in Q} f(x, \xi)\}, \tag{4}$$

$$\hat{x} \in Q.$$

Также

$$E\{f(\bar{x}(E\{\xi\}), \xi)\} \geqslant \min_{x \in Q} E\{f(x, \xi)\} = E\{f(\hat{x}, \xi)\}, \tag{5}$$

где $\bar{x}(E\{\xi\})$ определено формулой (3).

В дальнейшем мы неоднократно используем неравенство Йенсена, которое в работе [2] приведено в виде следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть $f(\xi)$ есть выпуклая действительная функция, определенная на непустом выпуклом множестве Q m-мерного векторного пространства, и пусть ξ есть m-мерный случайный вектор с конечным математическим ожиданием $E\{\xi\}$, для которого вероятность $P(\xi \in Q) = 1$. Тогда*

$$E\{\xi\} \in Q \quad \text{и} \quad f(E\{\xi\}) \leqslant E\{f(\xi)\}. \tag{6}$$

Неравенство (6) превращается в равенство, если $f(\xi)$ линейна. Приведем оценки и отношения между задачами (1), (2) и (3) при выполнении различных условий.

Лемма 1. *Если функция $f(x, \xi)$ выпукла по вектору ξ для любого x, то*

$$\begin{gathered}\min_{x \in Q} E\{f(x, \xi)\} = E\{f(\hat{x}, \xi)\} \geqslant f(\hat{x}, E\{\xi\}) \geqslant \\ \geqslant \min_{x \in Q} f(x, E\{\xi\}) = f(\bar{x}(E\{\xi\}), E\{\xi\}).\end{gathered} \tag{7}$$

Лемма 2. *Если функция $f(x, \xi)$ выпукла по вектору x для любого ξ, то*

$$E\{f(\bar{x}(\xi), E\{\xi\})\} \geqslant f(E\{\bar{x}(\xi)\}, E\{\xi\}). \tag{8}$$

Лемма 3. *Если множество Q выпукло, то*

$$f(E\{\bar{x}(\xi)\}, E\{\xi\}) \geqslant f(\bar{x}(E\{\xi\}), E\{\xi\}). \tag{9}$$

Лемма 4. *Если функция $f(x, \xi)$ выпукла по совокупности векторов (x, ξ), то дополнительно к неравенствам* (6) *и* (7)

$$E\{\min_{x \in Q} f(x, \xi)\} \geqslant f(E\{\bar{x}(\xi)\}, E\{\xi\}). \tag{10}$$

Доказательство лемм 1, 2, 3 и 4. Из неравенства Йенсена для выпуклых функций непосредственно следуют неравенства (8), (10) и левое неравенство (7). Поскольку $\bar{x}(\xi) \in Q$, то для выпуклого множества Q по теореме 1 $E\{\bar{x}(\xi)\} \in Q$. Очевидно, значение функции в точке минимума на множестве Q меньше или равно значению функции в любой другой точке множества Q, и поэтому имеет место неравенство (9) и правое неравенство (7).

Заметим, что из выпуклости функции $f(x, \xi)$ по совокупности векторов (x, ξ) следует выпуклость по x и ξ, но обратное утверждение неверно.

Если выполнены все условия, приведенные в леммах, то имеет место

Теорема 2. *Если функция $f(x, \xi)$ выпукла по совокупности векторов (x, ξ) и множество Q выпукло, то*

$$E\{f(\bar{x}(E\{\xi\}), \xi)\} \geqslant \min_{x \in Q} E\{f(x, \xi)\} \geqslant E\{\min_{x \in Q} f(x, \xi)\} \geqslant$$
$$\geqslant f(E\{\bar{x}(\xi)\}, E\{\xi\}) \geqslant \min_{x \in Q} f(x, E\{\xi\}) = f(\bar{x}(E\{\xi\}), E\{\xi\}). \tag{11}$$

Доказательство. Здесь два левых неравенства повторяют неравенства (4) и (5). Правое неравенство верно по лемме 3, а второе неравенство справа — по лемме 4.

Замечание 1. Левое неравенство (7) и неравенства (8), (10) превращаются в равенства, если функция $f(x, \xi)$ линейна по соответствующим аргументам. Для неравенства (7) требуется линейность по вектору ξ, для неравенства (8) — по вектору x и для неравенства (10) — по совокупности векторов (x, ξ). Правое неравенство (7) и неравенство (9) превращаются в равенства, если $\bar{x}(\xi)$ не зависит от ξ, в частности, если функция имеет вид $f(x, \xi) = h(x) + \varphi(\xi)$.

2. Переходим к рассмотрению задач минимизации, где допустимое множество задается функцией, зависящей от случайного вектора ξ.

Сформулируем следующие задачи:

$$E\{f(\bar{x}(\xi))\} = f^*, \qquad f(\bar{x}(\xi)) = \min_{g(x, \xi) \leqslant 0} f(x), \qquad g(\bar{x}(\xi), \xi) \leqslant 0; \tag{12}$$

$$\min_{x \in Q} f(x), \qquad Q = \{x : E\{g(x, \xi)\} \leqslant 0\}; \tag{13}$$

$$\min_{x \in \bar{Q}} f(x), \qquad \bar{Q} = \{x : g(x, E\{\xi\}) \leqslant 0\}. \tag{14}$$

Для обеспечения существования решений указанных задач можно, например, требовать непрерывности функций $f(x)$ и $g(x, \xi)$ по вектору x для любого вектора ξ, а также требовать, чтобы функция $|g(x, \xi)| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$ для любого ξ и чтобы $E\{g(x, \xi)\}$ была непрерывной функцией. Исследуем отношения между решениями сформулированных задач.

Лемма 5. *Если функция $g(x, \xi)$ выпукла по ξ для любого x, то*

$$\min_{x \in Q} f(x) \geqslant \min_{x \in \bar{Q}} f(x), \tag{15}$$

где $f(\bar{x}(\xi)) = \min\limits_{g(x, \xi) \leqslant 0} f(x)$, $\bar{Q} = \{x : g(x, E\{\xi\}) \leqslant 0\}$.

Доказательство. По неравенству Йенсена $E\{g(x, \xi)\} \geqslant$ $\geqslant g(x, E\{\xi\})$, а следовательно $Q \subset \bar{Q}$.

Лемма 6. *Пусть функция $f(x)$ выпукла и $g(x, \xi)$ выпукла по совокупности векторов (x, ξ). Тогда*

$$E\{f(\bar{x}(\xi))\} \geqslant \min_{x \in \bar{Q}} f(x), \tag{16}$$

где $f(\bar{x}(\xi)) = \min\limits_{g(x, \xi) \leqslant 0} f(x)$, $\bar{Q} = \{x : g(x, E\{\xi\}) \leqslant 0\}$.

Доказательство. По определению $\overline{x}(\xi)$ имеем, что $g(\overline{x}(\xi),\xi) \leqslant 0$ для любого ξ, но тогда и $Eg(\overline{x}(\xi),\xi) \leqslant 0$ и по неравенству Йенсена $g(E\{\overline{x}(\xi)\}, E\{\xi\}) \leqslant E\{g(\overline{x}(\xi),\xi)\} \leqslant 0$, т. е. $E\{\overline{x}(\xi)\} \in \overline{Q}$.

В силу выпуклости функции $E\{f(\overline{x}(\xi))\} \geqslant f(E\{\overline{x}(\xi)\})$, а поэтому и

$$E\{f(\bar{x}(\xi))\} \geqslant \min_{x \in \overline{Q}} f(x). \tag{17}$$

Лемма 7. *Пусть функция $f(x)$ выпукла и функция $g(x,\xi)$ имеет вид $g(x,\xi) = h(x) + \varphi(\xi)$, где $h(x)$ — выпуклая функция. Тогда*

$$\begin{gathered} E\{f(\bar{x}(\xi))\} \geqslant f(E\{\bar{x}(\xi)\}) \geqslant \min_{x \in Q} f(x), \\ f(\bar{x}(\xi)) = \min_{g(x,\xi) \leqslant 0} f(x), \quad g(\bar{x}(\xi),\xi) \leqslant 0, \quad Q = \{x : E\{g(x,\xi)\} \leqslant 0\}. \end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство. По неравенству Йенсена имеем $E\{f(\overline{x}(\xi))\} \geqslant f(E\{\overline{x}(\xi)\})$. Докажем еще, что в данных условиях $E\{\overline{x}(\xi)\} \in Q$. Из выпуклости функции $h(x)$ имеем

$$\begin{aligned} g(\bar{x}(\xi),\xi) &\geqslant g(E\{\bar{x}(\xi)\},\xi) + (g'_x(E\{\bar{x}(\xi)\},\xi), \bar{x}(\xi) - E\{\bar{x}(\xi)\}) = \\ &= g(E\{\bar{x}(\xi)\},\xi) + (h'_x(E\{\bar{x}(\xi)\}), \bar{x}(\xi) - E\{\overline{x}(\xi)\}), \end{aligned} \tag{19}$$

где $h'_x(E\{\overline{x}(\xi)\})$ — опорный к выпуклой функции $h(x)$ вектор, а (a,b) означает скалярное произведение векторов a и b.

Беря математическое ожидание с обеих сторон неравенства (19), получаем $E\{g(\overline{x}(\xi),\xi)\} \geqslant g(E\{\overline{x}(\xi),\xi\}$, но поскольку для любого ξ $g(\overline{x}(\xi),\xi) \leqslant 0$, то $g(E\{\overline{x}(\xi)\},\xi) \leqslant E\{g(\overline{x}(\xi),\xi)\} \leqslant 0$. Это и означает, что $E\{\overline{x}(\xi)\} \in Q$, а тем самым и

$$E\{f(\bar{x}(\xi))\} \geqslant f(E\{(\bar{x}(\xi))\}) \geqslant \min_{x \in Q} f(x).$$

Лемма 8. *Пусть функция $f(x)$ выпукла и функция $g(x,\xi)$ имеет вид $g(x,\xi) = h(x) + \varphi(\xi)$, где $h(x)$ и $\varphi(\xi)$ — выпуклые функции. Тогда*

$$\begin{gathered} E\{f(\bar{x}(\xi))\} \geqslant f(E\{\bar{x}(\xi)\}) \geqslant \min_{x \in Q} f(x) \geqslant \min_{x \in \overline{Q}} f(x), \\ f(\bar{x}(\xi)) = \min_{g(x,\xi) \leqslant 0} f(x), \quad g(\bar{x}(\xi),\xi) \leqslant 0, \\ Q = \{x : E\{g(x,\xi)\} \leqslant 0\}, \quad \overline{Q} = \{x : g(x, E\{\xi\}) \leqslant 0\}. \end{gathered} \tag{20}$$

Доказательство. Верность утверждения следует из лемм 6 и 7.

Рассмотрим теперь задачи, где ограничение задается в виде равенства, и сформулируем задачи:

$$E\{f(\bar{x}(\xi))\}, \quad \text{где} \quad f(\bar{x}(\xi)) = \min_{g(x,\xi)=0} f(x); \tag{21}$$

$$\min_{x \in Q} f(x), \quad Q = \{x : E\{g(x,\xi)\} = 0\}; \tag{22}$$

$$\min_{x \in Q} f(x), \quad \overline{Q} = \{x : g(x, E\{\xi\}) = 0\}. \tag{23}$$

Проведя аналогичные рассуждения получаем, что если функция $g(x,\xi)$ линейна по ξ, то

$$\min_{x\in Q} f(x) = \min_{x\in \overline{Q}} f(x), \tag{24}$$

$$Q = \{x : E\{g(x,\xi)\} = 0\} \quad \text{и} \quad \overline{Q} = \{x : g(x, E\{\xi\}) = 0\}.$$

Для выпуклой функции $f(x)$ и линейной функции $g(x,\xi)$ по совокупности векторов (x,ξ) имеем

$$E\{f(\bar{x}(\xi))\} \geqslant f(E\{\bar{x}(\xi)\}) \geqslant \min_{x\in Q} f(x) = \min_{x\in \overline{Q}} f(x). \tag{25}$$

Наконец, если функция $f(x)$ выпукла и функция $g(x,\xi)$ имеет вид $g(x,\xi) = (a,x) + g_1(\xi)$, где a — заданный вектор, то

$$E\{f(\bar{x}(\xi))\} \geqslant f(E\{\bar{x}(\xi)\}) \geqslant \min_{x\in Q} f(x). \tag{26}$$

3. По приведенной схеме можно проделать анализ и для более общего класса задач, где встречаются два независимых случайных вектора ξ, η с конечными математическими ожиданиями. При этом оставим в стороне вопросы существования решений в приведенных ниже задачах. Легко убедиться, что эти условия не настолько ограничительны, чтобы задачи потеряли смысл.

Итак, сформулируем следующие задачи:

$$E_{\xi\eta}\{f(\bar{x}(\xi,\eta),\xi)\} = a_1, \quad f(\bar{x}(\xi,\eta),\xi) = \min_{g(x,\eta)\leqslant 0} f(x,\xi); \tag{27}$$

$$E_{\eta}\{\min_{g(x,\eta)\leqslant 0} E_{\xi} f(x,\xi)\} = a_2; \tag{28}$$

$$E_{\eta}\{f(\bar{x}(\eta), E_{\xi}\{\xi\})\} = a_3, \quad f(\bar{x}(\eta), E_{\xi}\{\xi\}) = \min_{g(x,\eta)\leqslant 0} f(x, E_{\xi}\{\xi\}); \tag{29}$$

$$E_{\xi}\{f(\tilde{x}(\xi),\xi)\} = a_4, \quad f(\tilde{x}(\xi),\xi) = \min_{E_{\eta}\{g(x,\eta)\}\leqslant 0} f(x,\xi); \tag{30}$$

$$E_{\xi}\{f(\bar{x}(\xi),\xi)\} = a_5, \quad f(\bar{x}(\xi),\xi) = \min_{g(x,E_{\eta}\{\eta\})\leqslant 0} f(x,\xi); \tag{31}$$

$$\min_{E_{\eta}\{g(x,\eta)\}\leqslant 0} E_{\xi}\{f(x,\xi)\} = a_6; \tag{32}$$

$$\min_{E_{\eta}\{g(x,\eta)\}\leqslant 0} f(x, E_{\xi}\{\xi\}) = a_7; \tag{33}$$

$$\min_{g(x,E_{\eta}\{\eta\})\leqslant 0} E_{\xi}\{f(x,\xi)\} = a_8; \tag{34}$$

$$\min_{g(x,E_{\eta}\{\eta\})\leqslant 0} f(x, E_{\xi}\{\xi\}) = a_9. \tag{35}$$

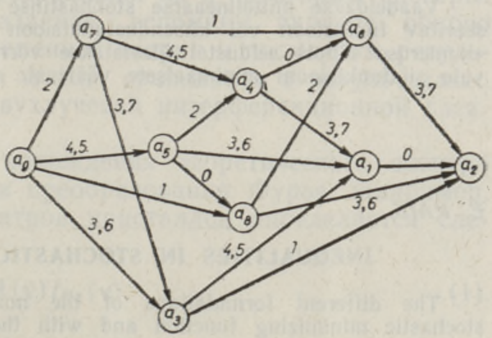
Приведем требования, которые в различных комбинациях будем налагать на функции $f(x,\xi)$ и $g(x,\eta)$:

1) функция $f(x,\xi)$ выпукла по ξ для любого x,
2) ,, $g(x,\eta)$,, η ,, x,
3) ,, $f(x,\xi)$,, x ,, ξ,
4) ,, $g(x,\eta)$,, x ,, η,
5) ,, $f(x,\xi)$ выпукла по совокупности (x,ξ),
6) ,, $g(x,\eta)$ выпукла по совокупности (x,η),
7) функция $g(x,\eta) = h(x) + \varphi(\eta)$ и $h(x)$ выпукла.

Отметим, что в задачах (27)—(35) аналогично неравенству (5) выполняются неравенства: $a_2 \geqslant a_1$, $a_6 \geqslant a_4$ и $a_8 \geqslant a_5$. В результате дальнейших исследований получена приведенная ниже таблица, которую следует читать следующим образом: если выполнены свойства соответствующих номеров, указанные крестиками в k-й строке, то выполнены неравенства, приведенные в k-й строке правого столбца. Неравенства первой строки выполнены без всяких дополнительных предположений.

Номера выполненных свойств							Неравенства
1	2	3	4	5	6	7	
							$a_2 \geqslant a_1$, $a_6 \geqslant a_4$, $a_8 \geqslant a_5$
×							$a_2 \geqslant a_3$, $a_6 \geqslant a_7$, $a_8 \geqslant a_9$
	×						$a_4 \geqslant a_5$, $a_6 \geqslant a_8$, $a_7 \geqslant a_9$
		×			×		$a_1 \geqslant a_5$, $a_2 \geqslant a_8$, $a_3 \geqslant a_9$
			×	×			$a_1 \geqslant a_3$, $a_4 \geqslant a_7$, $a_5 \geqslant a_9$
		×				×	$a_1 \geqslant a_4$, $a_2 \geqslant a_6$, $a_3 \geqslant a_7$

Более наглядно эти отношения можно представить на графе (см. рисунок), где связанные неравенствами числа a_i соединены стрелкой, а номера на стрелке указывают, что при выполнении условий, стоящих под этими номерами, имеет место неравенство между соединенными стрелкой числами. Например, a_6 и a_2 соединены стрелкой с номерами 3, 7. Это означает, что $a_2 \geqslant a_6$, если выполнены условия 3 и 7. Номер «0» указывает, что неравенство выполняется без всяких дополнительных условий.



При использовании графа надо обратить внимание на то, что выполнение условия 5 ведет за собой выполнение условий 1 и 3, из выполнения условия 6 следует выполнение свойств 2 и 4, а также из условия 7 следует выполнение условия 4.

Хотя до сих пор рассмотрены задачи с одним ограничением, большинство приведенных результатов обобщается на задачи минимизации с несколькими ограничениями

$$\min_{g_i(x,\xi)\leqslant 0} f(x) \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

так как их можно заменить одним эквивалентным ограничением

$$g(x, \xi) = \sum_{i=1}^{p} K_i [g_i(x, \xi)]_+, \quad \text{где} \quad K_i > 0$$

и

$$[g_i(x, \xi)]_+ = \max\{0, g_i(x, \xi)\}.$$

Притом из выпуклости функций $g_i(x, \xi)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ по отдельным компонентам или в совокупности следует выпуклость функции $g(x, \xi)$ по соответствующим компонентам или в совокупности.

Для стохастических задач линейного программирования аналогичные исследования проведены А. Маданским [3], а для двухэтапной задачи стохастического программирования О. Л. Мангасаряном и Дж. Б. Розеном [4].

В заключение автор благодарит И. Петерсена за обсуждение результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mangasarian O. L., Manag. Sci., **10**, 353 (1963/64).
2. Sworder D. D., Optimal Adaptive Control Systems, London Academic Press, N. Y., 1966.
3. Madansky A., Manag. Sci., **6**, 197 (1959/60).
4. Mangasarian O. L., Rosen J. B., Operat. Res., **12**, 143 (1964).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/VI 1969

E. RAIK

VÕRRATUSED STOHHASTILISE PLANEERIMISE ÜLESANNETES

Vaadeldakse mittelineaarse stohhastilise planeerimise ülesandeid, kus kas minimiseeritav funktsioon või kitsendusfunktsioon sõltub juhuslikust vektorist. Täiendavate «kumeruse tüüpi» eeldustel tõestatakse võrratused erinevates formuleeringutes saadavate sihifunktsiooni minimaalsete väärtuste vahel.

E. RAIK

INEQUALITIES IN STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS

The different formulations of the nonlinear programming problems with the stochastic minimizing function and with the stochastic constraints are discussed. In the paper, inequalities between minimal values of the objective functions in case of different formulations are proved.