EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.04

*Т. ВИЙК*

# К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

1. Диффузия фотонов характеризуется уравнением переноса излучения, которое в общем случае является интегрально-дифференциальным уравнением. Для решения этого уравнения разработано много приближенных методов, но точное решение пока найдено лишь для случая серого плоско-параллельного слоя или полупространства. В настоящей статье мы рассмотрим два приближенных метода для решения уравнения переноса в сферическом случае. Напишем уравнение переноса в виде

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} - f(1-\mu^2) \frac{\partial I}{\partial \tau} = \alpha I - \beta B - \frac{1}{2} \omega \int_{-1}^{+1} I d\mu, \tag{1.1}$$

где

$$f = [(k_p + \sigma_p) \varrho R]^{-1}, \quad \alpha = \frac{k+\sigma}{k_p+\sigma_p}, \quad \beta = \frac{k}{k_p+\sigma_p}, \quad \omega = \alpha - \beta,$$

а $k_p$ и $\sigma_p$ — планковские средние коэффициенты поглощения и рассеяния. Остальные обозначения общеприняты. Отметим, что для упрощения записи у монохроматических величин опущен индекс «$\nu$». Пусть теперь

$$I(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2k+1}{2} P_k(\mu) I_k(\tau), \tag{1.2}$$

где

$$I_k(\tau) = \int_{-1}^{+1} P_k(\mu) I(\tau, \mu) d\mu. \tag{1.3}$$

Подставляя функции Лежандра $P_k(\mu)$ в формулу (1.3) и интегрируя, мы можем найти $I_k(\tau)$ в явном виде:

$$I_0(\tau) = 2J(\tau), \quad I_1(\tau) = 2H(\tau), \quad I_2(\tau) = 3K(\tau) - J(\tau), \ldots \tag{1.4}$$

где $J$, $H$ и $K$ — первые три эддингтоновских момента интенсивности. Соответственно, ряд (1.2) примет вид

$$I(\tau, \mu) = J(\tau) + 3\mu H(\tau) + \frac{5}{4}(3\mu^2 - 1)[3K(\tau) - J(\tau)] + \ldots \tag{1.5}$$

Подставляя теперь формулу (1.2) в производную от $I$ по $\mu$ в формуле (1.1), получим

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = \alpha I - \beta B - \frac{1}{2} \omega \int_{-1}^{+1} p(\tau, \mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu', \tag{1.6}$$

где индикатриса (ненормированная)

$$p(\tau, \mu, \mu') = 1 - \frac{2f}{\omega}(1-\mu^2)\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{2}\frac{dP_k}{d\mu}P_k(\mu'). \tag{1.7}$$

Таким образом, нам удалось привести уравнение переноса в сферическом случае к виду, совпадающему с уравнением переноса в плоскопараллельном случае с анизотропным рассеянием.

Покажем теперь, что из уравнения (1.6) следуют правильные уравнения для моментов $J$, $H$ и $K$. Интегрируем (1.6) по $\mu$ от $-1$ до 1. В результате получим

$$\frac{dH}{d\tau} = \beta J - \beta B + \frac{1}{2}f\int_{-1}^{+1}d\mu\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{2}(1-\mu^2)\frac{dP_k}{d\mu}\int_{-1}^{+1}P_k(\mu')I(\tau,\mu')\,d\mu'. \tag{1.8}$$

Последний член правой части уравнения может быть упрощен интегрированием по частям, после чего он принимает вид

$$f\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1}d\mu'\int_{-1}^{+1}P_k(\mu)P_k(\mu')I(\tau,\mu')\,\mu\,d\mu. \tag{1.9}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_{-1}^{+1}\mu^l P_k(\mu)\,d\mu, \quad \text{где} \quad l, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

Если $l+k=2m+1$, где $m=0, 1, 2, \ldots$, то интеграл (1.10) равен нулю, так как $P_{2m}$ является четной функцией. Если же $l+k=2m$, то

$$\int_{-1}^{+1}\mu^l P_k(\mu)\,d\mu = 2\int_{0}^{1}\mu^l P_k(\mu)\,d\mu. \tag{1.11}$$

Но из [1] найдем, что

$$\int_{0}^{1}\mu^l P_k(\mu)\,d\mu = \frac{\sqrt{\pi}\,2^{-l-1}\Gamma(1+l)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}l+\frac{3}{2}\right)}. \tag{1.12}$$

Из формулы (1.12) следует, что если $k-l \geqslant 2$, то интеграл равняется нулю, так как $\Gamma(n)=\infty$, если $n=0, -1, -2, \ldots$ Таким образом,

$$\int_{-1}^{+1}P_k(\mu)\,d\mu = 2\delta_{0k}, \qquad \int_{-1}^{+1}\mu P_k(\mu)\,d\mu = \frac{2}{3}\delta_{1k}$$

и (1.13)

$$\int_{-1}^{+1}\mu^2 P_k(\mu)\,d\mu = \frac{2}{3}\delta_{0k} + \frac{4}{15}\delta_{2k}.$$

Поэтому из (1.9) следует, что

$$f\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{2}{3}\delta_{1k}P_k(\mu')I(\tau,\mu')\,d\mu' = 2Hf$$

и уравнение (1.8) принимает требуемую форму

$$\frac{dH}{d\tau} - 2fH = \beta(J-B). \tag{1.14}$$

Умножая уравнение (1.6) на $\mu$ и проинтегрируя, аналогичным путем получим, что

$$\frac{1}{2}f\int_{-1}^{+1}\mu\,d\mu\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{2}(1-\mu^2)\frac{dP_k}{d\mu}\int_{-1}^{+1}P_k(\mu')I(\tau,\mu')\,d\mu'=$$

$$=\frac{1}{2}f\int_{-1}^{+1}(3\mu'^2-1)I(\tau,\mu')\,d\mu'=f(3K-J),$$

и наконец уравнение примет вид

$$\frac{dK}{d\tau}-f(3K-J)=\alpha H. \tag{1.15}$$

Следует отметить, что приближение приведенного типа, т. е. замена производной от интенсивности по $\mu$ степенными рядами по $\mu$, было использовано нами в работе [2].

В практических приложениях придется ограничиваться конечным числом членов в индикатрисе (1.7). Интересно отметить, что первое приближение индикатрисы ($k=1$)

$$p_1(\tau,\mu,\mu')=1-\frac{3f}{\omega}(1-\mu^2)\mu'$$

дает уравнения для моментов $H$ и $K$ в приближении Эддингтона $K=\frac{1}{3}J$, а второе приближение ($k=2$)

$$p_2(\tau,\mu,\mu')=1-\frac{3f}{\omega}(1-\mu^2)\left[\mu'+\frac{5}{2}\mu(3\mu'^2-1)\right]$$

дает уже точные уравнения. Тем самым оказывается, что в слабо сферических атмосферах можно использовать методику решения уравнения переноса, разработанную для плоско-параллельных атмосфер с анизотропным рассеянием.

С другой стороны, уравнение переноса при учете индикатрисы $p_2$ имеет вид

$$\mu\frac{dI}{d\tau}=\alpha I-\beta B-\left[\omega+\frac{15}{2}f\mu(1-\mu^2)\right]J+3f(1-\mu^2)H+$$
$$+\frac{45}{2}f\mu(1-\mu^2)K. \tag{1.16}$$

Но так как эддингтоновские моменты $M_n$ удовлетворяют уравнению [3]

$$2M_n(\tau)=\int_{\tau}^{\infty}\int_{0}^{1}S(t)\mu^{n-1}e^{-\frac{t-\tau}{\mu}}\,d\mu\,dt+(-1)^n\int_{0}^{\tau}\int_{0}^{1}S(t)\mu^{n-1}e^{-\frac{\tau-t}{\mu}}\,d\mu\,dt, \tag{1.17}$$

где $S(t)$ — функция источника, то для определения моментов $J$, $H$ и $K$ получим систему из трех линейных интегральных уравнений:

$$J(\tau)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\beta}{\alpha}B(t)E_1^*\,d\eta+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega}{\alpha}J(t)E_1^*\,d\eta-$$
$$-\frac{15}{4}\int_{0}^{\infty}\frac{f}{\alpha}[3K(t)-J(t)](E_2^*-E_4^*)\,d\eta-\frac{3}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{f}{\alpha}H(t)(E_1^*-E_3^*)\,d\eta, \tag{1.18}$$

$$H(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{\infty}\frac{\beta}{\alpha}B(t)E_2\,d\eta-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{\beta}{\alpha}B(t)\tilde{E}_2\,d\eta+\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{\infty}\frac{\omega}{\alpha}J(t)E_2\,d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{\omega}{\alpha}J(t)\tilde{E}_2\,d\eta-\frac{15}{4}\int\limits_{\tau}^{\infty}\frac{f}{\alpha}[3K(t)-J(t)](E_3-E_5)\,d\eta+$$

$$+\frac{15}{4}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{f}{\alpha}[3K(t)-J(t)](\tilde{E}_3-\tilde{E}_5)\,d\eta-\frac{3}{2}\int\limits_{\tau}^{\infty}\frac{f}{\alpha}H(t)(E_2-E_4)\,d\eta+ \qquad (1.19)$$

$$+\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{f}{\alpha}H(t)(\tilde{E}_2-\tilde{E}_4)\,d\eta.$$

$$K(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\beta}{\alpha}B(t)E_3^*\,d\eta+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\omega}{\alpha}J(t)E_3^*\,d\eta-$$

$$-\frac{15}{4}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f}{\alpha}[3K(t)-J(t)](E_4^*-E_6^*)\,d\eta- \qquad (1.20)$$

$$-\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f}{\alpha}H(t)(E_3^*-E_5^*)\,d\eta,$$

$$d\eta=\eta'_\nu\,dt,$$

где

$$\eta'_\nu=\frac{k_\nu+\sigma_\nu}{k_p+\sigma_p},\qquad E_n=E_n(\eta_\nu(t)-\eta_\nu(\tau)),$$

$$\tilde{E}_n=E_n(\eta_\nu(\tau)-\eta_\nu(t)),\qquad E_n^*=E_n(|\eta_\nu(t)-\eta_\nu(\tau)|),$$

а

$$E_n(z)=\int\limits_0^1 e^{-\frac{z}{\mu}}\mu^{n-2}\,d\mu.$$

Таким образом, решение интегрально-дифференциального уравнения (1.16) заменено решением системы из трех линейных интегральных уравнений (1.17)—(1.20).

Как видно из уравнения (1.16), приведенный метод аппроксимации уравнения переноса годен в оптически довольно глубоких слоях, где каждый из членов $J$, $H$, $3K-J$ меньше предыдущего. Тогда можно ожидать быструю сходимость функции источника. С другой стороны, каждый член той части функции источника, которая обусловлена производной от интенсивности по $\mu$, содержит член $f$. Таким образом, и в слабо сферических системах, где $f$ малая, наш метод применим.

**2.** Рассмотрим теперь несколько иной путь решения уравнения переноса в случае сферически-симметричной атмосферы, предложенный Г. Кузминым *. Известно [4], что в сферическом случае интенсивность излучения принимает вид $\delta$-функции Дирака при $\tau\to 0$. Это соответствует полностью радиальному полю излучения и все эддингтоновские

* Частное сообщение Г. Кузмина.

моменты равны между собой. С другой стороны, при $\tau \to \infty$ излучение становится изотропным и из определений эддингтоновских моментов следует, что

$$K = \frac{1}{3} J \quad \text{и} \quad \frac{H}{J} \to 0.$$

Учитывая такой ход интенсивности с оптической глубиной, Г. Кузмин предложил выразить угловую зависимость интенсивности при помощи определенной «индикатрисы», например: эллиптической с эксцентриситетом, меняющимся от 0, при $\tau \to \infty$, до 1, при $\tau \to 0$. Ясно, что таким требованиям удовлетворяет интенсивность излучения в виде **

$$I(\tau, \mu) = A(\tau) J(\tau) [1 - e(\tau)\mu]^{-1}, \tag{2.1}$$

где $e$ — эксцентриситет, $A$ — постоянная нормирования, причем

$$A = 2e\left(\ln\frac{1+e}{1-e}\right)^{-1}. \tag{2.2}$$

Таким образом, эддингтоновские моменты принимают вид:

$$J = J,$$

$$H = \frac{1}{2e} AJ\left(\frac{1}{e}\ln\frac{1+e}{1-e} - 2\right) = AJx, \tag{2.3}$$

$$K = \frac{1}{2e^2} AJ\left(\frac{1}{e}\ln\frac{1+e}{1-e} - 2\right) = \frac{1}{e} AJx. \tag{2.4}$$

Легко установить, что $H$ и $K$ действительно удовлетворяют приведенным выше граничным условиям. Принимая теперь в учет выражения (2.3) и (2.4), из уравнений (1.7) и (1.8) мы получим

$$Ax\frac{d\ln J}{d\tau} = \frac{2}{f}Ax - \frac{d(Ax)}{d\tau} - \frac{S}{J} + 1, \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{e}Ax\frac{de}{d\tau} = 1 - \frac{S}{J} - \frac{1}{f}Ax - Aex + \frac{e}{f}, \tag{2.6}$$

где

$$\frac{d(Ax)}{d\tau} = \frac{2}{e^2}\left\{\left(\ln\frac{1+e}{1-e} + \frac{2e^2}{1-e^2}\right)\left(\ln\frac{1+e}{1-e}\right)^{-2} - \frac{1}{e}\right\}\frac{de}{d\tau}. \tag{2.7}$$

Граничные условия для уравнений (2.5) и (2.6) имеют вид

$$e(0) = 1, \quad J(0) = H_0 R_0^2 R^{-2}|_{\tau=0}, \tag{2.8}$$

или

$$e(\infty) = 0 \quad \text{и} \quad J(\infty) = B, \tag{2.9}$$

где $H_0$ — поток на определенном расстоянии $R_0$ от центра звезды.

Может оказаться, что в некоторых случаях мы получим достаточную точность решения, предполагая слабую зависимость эксцентриситета $e$ от оптической глубины $\tau$. Тогда $\frac{de}{d\tau} = 0$ и $e$ определяется итерационным способом из трансцендентного уравнения

$$1 - \frac{S}{J} - \frac{1}{f}Ax - Aex + \frac{e}{f} = 0. \tag{2.10}$$

Таким образом, можно ожидать, что при использовании этого метода не возникает особых трудностей даже в случае самых внешних слоев атмосферы.

** Частное сообщение А. Сапара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн В. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1962, с. 810.
2. Сапар А., Вийк Т., Публ. Тартуск. астрон. обсерв., **36**, 120 (1968).
3. Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, М., 1963, с. 23.
4. Chandrasekhar S., Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **94**, 444 (1934).

*Институт физики и астрономии*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
20/V 1969

*T. VIIK*

## ÜLEKANDEVÕRRANDI LAHENDAMISEST SFÄÄRILISEL JUHUL

Kiirguse ülekande võrrandit on nõrgalt sfäärilise keskkonna puhul võimalik taandada anisotroopse hajumisega tasaparalleelse keskkonna jaoks koostatud ülekandevõrrandiks. Ligikaudse integro-diferentsiaalvõrrandi lahendamine asendatakse kolmest lineaarsest integraalvõrrandist koosneva süsteemi lahendamisega. Artikli teises osas esitatakse kiirguse ülekande võrrandi lahendamiseks uus meetod, kus intensiivsuse sõltuvus nurgast lähendatakse elliptilise «indikatrissiga», mille ekstsentrisus optilise sügavuse lõpmatusest nullini muutudes muutub nullist üheni.

*T. VIIK*

## ON SOLVING THE SPHERICAL TRANSFER EQUATION

In this paper it is shown that the transfer equation in a weakly spherical case can be reduced to a planar case with anisotropic scattering. The phase function has a form of an infinite series, but by taking only two first terms, one can obtain correct equations for Eddington moments $J$, $H$ and $K$. Using this truncated phase function, a system of three linear integral equations for $J$, $H$ and $K$ is obtained.

In the second part of the paper, a new method for solving the transfer equation is proposed. The basic element of this approach is approximating the angular distribution of the specific intensity by means of function (2.1), i. e. one assumes that the specific intensity depends on the angle elliptically with the eccentricity changing from zero in $\tau \to \infty$ to one in $\tau \to 0$. This approximation allows one to find two coupled first-order differential equations for the mean intensity and eccentricity. The boundary conditions are well defined both for $\tau \to 0$ and $\tau \to \infty$.