EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.03

ИНГРИД СЫРМУС, Э. ТАММЕ

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

§ 1. Введение

Рассмотрим нестационарное уравнение переноса [1] для анизотропного рассеяния в плоско-параллельном слое

$$\frac{1}{v}\frac{\partial I(z,\mu,\varphi,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial I(z,\mu,\varphi,t)}{\partial z}+\sigma(z,\mu,\varphi,t)I(z,\mu,\varphi,t)=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\gamma(z,\mu,\varphi,\mu',\varphi',t)I(z,\mu',\varphi',t)\,d\mu'\,d\varphi'+f(z,\mu,\varphi,t) \qquad (1)$$

с граничными условиями:

$$I(H,\mu,\varphi,t)=\alpha(\mu,\varphi,t)\quad \text{при}\quad \mu<0,$$
$$I(0,\mu,\varphi,t)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{0}\delta(\mu,\varphi,\mu',\varphi',t)I(0,\mu',\varphi',t)\,d\mu'\,d\varphi'+\beta(\mu,\varphi,t)$$
$$\text{при}\quad \mu>0 \qquad (2)$$

и с начальным условием

$$I(z,\mu,\varphi,0)=\Psi(z,\mu,\varphi). \qquad (3)$$

Данное уравнение описывает процессы переноса нейтронов в ядерном реакторе, перенос лучистой энергии в растительном покрове и др. (см. [2,3]).

Предположим, что v — положительная постоянная, функции $\sigma(z,\mu,\varphi,t)$, $f(z,\mu,\varphi,t)$, $\alpha(\mu,\varphi,t)$, $\beta(\mu,\varphi,t)$, $\gamma(z,\mu,\varphi,\mu',\varphi',t)$, $\delta(\mu,\varphi,\mu',\varphi',t)$ непрерывны в области $0\leqslant z\leqslant H$, $-1\leqslant\mu,\mu'\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi,\varphi'\leqslant 2\pi$, $0\leqslant t\leqslant T$ и что в этой области $\sigma(z,\mu,\varphi,t)\geqslant 0$, $\gamma(z,\mu,\varphi,\mu',\varphi',t)\geqslant 0$, $\delta(\mu,\varphi,\mu',\varphi',t)\geqslant 0$. Для решения этой задачи производные заменим конечными разностями, и интегральные члены — суммами на основании некоторой кубатурной формулы

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\Phi(\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi\approx\sum_{j=1}^{N}A_j\Phi(\mu_j,\varphi_j).$$

Предположим, что $A_j>0$ и $\mu_j\neq 0$ $(j=1,2,\ldots,N)$. Узлы кубатурной формулы упорядочим так, чтобы

$$\mu_j<0\quad \text{при}\ j=1,2,\ldots,N_1\quad \text{и}$$
$$\mu_j>0\quad \text{при}\ j=N_1+1,\ldots,N.$$

Выберем сетку относительно z и t так, что $z_i = ih$ и $t_m = m\tau$, где $h = H/n$, $\tau > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$ и $m = 0, 1, \ldots, [T/\tau]$.

Обозначим через J множество пар индексов (i, j) такое, что при $j = 1, 2, \ldots, N_1$ индекс $i = 0, 1, \ldots, n-1$, а при $j = N_1 + 1, \ldots, N$ индекс $i = 1, 2, \ldots, n$. Введем еще обозначения:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ijm} = \sigma(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m), && f_{ijm} = f(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m), \\ &\alpha_{jm} = \alpha(\mu_j, \varphi_j, t_m), && \beta_{jm} = \beta(\mu_j, \varphi_j, t_m), \\ &\gamma_{ijkm} = \gamma(z_i, \mu_j, \varphi_j, \mu_k, \varphi_k, t_m), && \delta_{jkm} = \delta(\mu_j, \varphi_j, \mu_k, \varphi_k). \end{aligned}$$

Предположим, что

$$\sigma_{ijm} - \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{ijkm} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$

$$1 - \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jkm} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad j = N_1 + 1, \ldots, N \tag{5}$$

и что можно оценить погрешности кубатурных формул:

$$R_{jN}(z, t) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \gamma(z, \mu_j, \varphi_j, \mu', \varphi', t) I(z, \mu', \varphi', t)\, d\mu'\, d\varphi' - \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma(z, \mu_j, \varphi_j, \mu_k, \varphi_k, t) I(z, \mu_k, \varphi_k, t),$$

$$r_{jN}(t) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{0} \delta(\mu_j, \varphi_j, \mu', \varphi', t) I(0, \mu', \varphi', t)\, d\mu'\, d\varphi' - \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta(\mu_j, \varphi_j, \mu_k, \varphi_k, t) I(0, \mu_k, \varphi_k, t).$$

§ 2. Разностные схемы для решения нестационарного уравнения переноса

Рассмотрим три разностные схемы для решения задачи $\{(1)-(3)\}$. Одну из самых простых разностных схем получаем следующим образом. Аппроксимируем уравнение (1) системой алгебраических уравнений

$$\frac{I_{ij,m+1} - I_{ijm}}{v\tau} + L_1[I_{ij,m+1}] = L_2[I_{ijm}] + f_{ijm}, \tag{6}$$

где $(i, j) \in J$, $m = 0, 1, \ldots$ и

$$\left.\begin{aligned} &L_1[I_{ij,m+1}] = \begin{cases} \mu_j \dfrac{I_{i+1,j,m+1} - I_{ij,m+1}}{h} + \sigma_{ijm} I_{ij,m+1} & \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1, \\ \mu_j \dfrac{I_{ij,m+1} - I_{i-1,j,m+1}}{h} + \sigma_{ijm} I_{ij,m+1} & \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N, \end{cases} \\ &L_2[I_{ijm}] = \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{ijkm} I_{ikm}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из граничных и начальных условий (2) и (3) получим

$$\left.\begin{aligned} &I_{nj,m+1} = \alpha_{j,m+1} && \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1, \\ &l[I_{0j,m+1}] = \beta_{j,m+1} && \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N, \\ &I_{ij0} = \Psi_{ij} = \Psi(z_i, \mu_j, \varphi_j), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$l[I_{0j,m+1}] = I_{0j,m+1} - \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jkm} I_{0k,m+1}.$$

Запишем разностную схему $\{(6), (8)\}$ более подробно.

$$\left(\frac{1}{v\tau}-\frac{\mu_j}{h}+\sigma_{ijm}\right)I_{ij,m+1}+\frac{\mu_j}{h}I_{i+1,j,m+1}=$$

$$=\frac{1}{v\tau}I_{ijm}+\sum_{k=1}^{N}A_k\gamma_{ijkm}I_{ikm}+f_{ijm} \qquad \text{при} \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N_1,$$

$$\left(\frac{1}{v\tau}+\frac{\mu_j}{h}+\sigma_{ijm}\right)I_{ij,m+1}-\frac{\mu_j}{h}I_{i-1,j,m+1}=$$

$$=\frac{1}{v\tau}I_{ijm}+\sum_{k=1}^{N}A_k\gamma_{ijkm}I_{ikm}+f_{ijm} \qquad \text{при} \quad j=N_1+1,\ \ldots,\ N,$$

$$I_{nj,m+1}=\alpha_{j,m+1} \qquad \text{при} \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N_1,$$

$$I_{0j,m+1}=\sum_{k=1}^{N_1}A_k\delta_{jkm}I_{0k,m+1}+\beta_{j,m+1} \qquad \text{при} \quad j=N_1+1,\ \ldots,\ N,$$

$$I_{ij0}=\Psi_{ij}.$$

При помощи последних формул вычисления ведутся довольно просто. Пусть I_{ijm} уже найдено (I_{ij0} получается из начальных условий). Тогда $I_{nj,m+1}=\alpha_{j,m+1}$ при $j=1,2,\ \ldots,\ N_1$, и при тех же j рекуррентно вычисляются $I_{n-1,j,m+1},\ \ldots,\ I_{0j,m+1}$. Из краевых условий получается $I_{0j,m+1}$ при $j=N_1+1,\ \ldots,\ N$, затем уже просто найти остальные значения $I_{1j,m+1},\ \ldots$ и $I_{nj,m+1}$ при тех же j.

Будем называть разностную схему сходящейся, если при $N\to\infty$, $h\to 0$ и $\tau\to 0$

$$\max_{ijm}|I(z_i,\mu_j,\varphi_j,t_m)-I_{ijm}|\to 0,$$

где $I(z_i,\ \mu_j,\ \varphi_j,\ t_m)$ является значением точного решения задачи $\{(1)-(3)\}$, а I_{ijm} — его приближением, найденным при решении соответствующей разностной задачи. Можно показать, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует ее сходимость. Поэтому приступим к изучению устойчивости разностной схемы $\{(6), (8)\}$.

Будем называть разностную задачу $\{(6), (8)\}$ устойчивой (по начальным и граничным условиям и по правой части), если для ее решения I_{ijm} выполняется неравенство

$$\max_{ijm}|I_{ijm}|\leqslant P_1\max_{ij}|I_{ij0}|+P_2\max_{jm}|\alpha_{jm}|+P_3\max_{jm}|\beta_{jm}|+ \\ +P_4\max_{ijm}|f_{ijm}|, \tag{9}$$

где P_1, P_2, P_3 и P_4 — некоторые постоянные, не зависящие от величин I_{ij0}, α_{jm}, β_{jm}, f_{ijm}, от узлов μ_j, φ_j и от шагов h, τ. При этом $i=0,1,\ \ldots,\ n$, $j=1,2,\ \ldots,\ N$, $m=0,1,\ \ldots,\ [T/\tau]$; считаем $\alpha_{jm}=0$, если $j=N_1+1,\ \ldots,\ N$, и $\beta_{jm}=0$, если $j=1,2,\ \ldots,\ N_1$. Если неравенство (9) выполняется при $\alpha_{jm}=0$ и $\beta_{jm}=0$, то будем называть разностную задачу устойчивой по начальным условиям и по правой части.

Оказывается, что разностная задача $\{(6), (8)\}$ устойчива по начальным условиям и по правой части. Покажем это с помощью принципа максимума [4, 5].

Оценим максимум решения $I_{ij,m+1}$ задачи $\{(6), (8)\}$ при фиксированном m. Пусть $\max\limits_{ij}I_{ij,m+1}=I_{pq,m+1}$. Решение может достигать максимального значения на границе или внутри области. В соответствии с этим имеем три случая:

1° если одновременно $p = n$ и $q = 1, 2, \ldots, N_1$, то из соотношения (8) вытекает $I_{pq,m+1} = \alpha_{q,m+1}$;

2° если одновременно $p = 0$ и $q = N_1 + 1, \ldots, N$, то ввиду предположения (5) из соотношения (8) следует

$$I_{0q,m+1} \leqslant \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{qkm} \max_{j=1,2,\ldots,N_1} |I_{0j,m+1}| + \max_j |\beta_{j,m+1}| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{j=1,2,\ldots,N_1} |I_{0j,m+1}| + \max_j |\beta_{j,m+1}|;$$

3° если $0 \leqslant p < n$ и $q = 1, 2, \ldots, N_1$ или $0 < p \leqslant n$ и $q = N_1 + 1, \ldots, N$, то из соотношения (6) получим

$$\left(\frac{1}{v\tau} + \sigma_{pqm}\right) I_{pq,m+1} \leqslant \left(\frac{1}{v\tau} + \sum_{k=1}^{N} A_k \gamma_{pqm}\right) \max_{ij} |I_{ijm}| + \max_{ij} |f_{ijm}|,$$

откуда на основании предположения (4) следует

$$I_{pq,m+1} \leqslant \max_{ij} |I_{ijm}| + v\tau \max_{ij} |f_{ijm}|.$$

Следовательно,

$$I_{pq,m+1} \leqslant \max \Bigl(\max_j |\alpha_{j,m+1}|; \max_{j=1,2,\ldots,N_1} |I_{0j,m+1}| + \max_j |\beta_{j,m+1}|;$$
$$\max_{ij} |I_{ijm}| + v\tau \max_{ij} |f_{ijm}| \Bigr). \tag{10}$$

Если $\min_{ij} I_{ij,m+1} = I_{st,m+1}$, то аналогичными рассуждениями получим

$$I_{st,m+1} \geqslant -\max \Bigl(\max_j |\alpha_{j,m+1}|; \max_{j=1,2,\ldots,N_1} |I_{0j,m+1}| + \max_j |\beta_{j,m+1}|;$$
$$\max_{ij} |I_{ijm}| + v\tau \max_{ij} |f_{ijm}| \Bigr). \tag{11}$$

Так как $I_{st,m+1} \leqslant I_{ij,m+1} \leqslant I_{pq,m+1}$, то из неравенств (10) и (11) следует

$$|I_{ij,m+1}| \leqslant \max \Bigl(\max_j |\alpha_{j,m+1}|; \max_{j=1,2,\ldots,N_1} |I_{0j,m+1}| + \max_j |\beta_{j,m+1}|;$$
$$\max_{ij} |I_{ijm}| + v\tau \max_{ij} |f_{ijm}| \Bigr)$$

или

$$\max_{ij} |I_{ij,m+1}| \leqslant \max \Bigl(\max_j |\alpha_{j,m+1}|; \max_{ij} |I_{ijm}| + v\tau \max_{ij} |f_{ijm}| +$$
$$+ \max_j |\beta_{j,m+1}| \Bigr). \tag{12}$$

Так как $m \leqslant T/\tau$, то из неравенства (12) по индукции получим

$$\max_{ijm} |I_{ijm}| \leqslant \max_{ij} |I_{ij0}| + \max_{jm} |\alpha_{jm}| + \frac{T}{\tau} \max_{jm} |\beta_{jm}| + vT \max_{ijm} |f_{ijm}|. \tag{13}$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнены условия* (4), (5) *и* $\sigma_{ijm} \geqslant 0$, $\gamma_{ijm} \geqslant 0$, $\delta_{jkm} \geqslant 0$, *то решение разностной задачи* {(6), (8)} *удовлетворяет неравенству* (13).

Замечание. При сделанных предположениях разностная схема {(6), (8)} устойчива по начальным данным и по правой части. Эта схема устойчива также по граничным условиям, если $\beta_{jm}=0$ или $\delta_{jkm}=0$.

Оценим погрешность, возникающую при замене задачи {(1)—(3)} системой алгебраических уравнений {(6), (8)}. Пусть $I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m)$ — значение точного решения задачи {(1)—(3)}, а I_{ijm} — его приближение, найденное как решение системы {(6), (8)}. Значения $I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_{m+1})-I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m)}{v\tau}+L_1[I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_{m+1})]-\\
&-L_2[I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m)]=f(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m)+w_{ijm},\\
&I(H, \mu_j, \varphi_j, t_{m+1})=\alpha_{j,m+1} \qquad \text{при } j=1, 2, \ldots, N_1,\\
&l[I(0, \mu_j, \varphi_j, t_{m+1})]=\beta_{j,m+1}+r_{jN}(t_{m+1}) \quad \text{при } j=N_1+1, \ldots, N,\\
&I(z_i, \mu_j, \varphi_j, 0)=\Psi(z_i, \mu_j, \varphi_j),
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где

$$w_{ijm}=\frac{\Theta_1\tau}{2v}N_2+\frac{\Theta_2 h}{2}M_2+R_{jN}(z_i, t_m), \quad |\Theta_1|<1, \quad |\Theta_2|<1.$$

Предположим, что $I(z, \mu, \varphi, t)$ имеет производные второго порядка и

$$\left|\frac{\partial^2 I(z, \mu, \varphi, t)}{\partial t^2}\right| \leqslant N_2, \quad \left|\frac{\partial^2 I(z, \mu, \varphi, t)}{\partial z^2}\right| \leqslant M_2 \tag{15}$$

при

$$0 \leqslant z \leqslant H, \ -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Пусть $\eta_{ijm}=I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m)-I_{ijm}$. Значения η_{ijm} удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\eta_{ij,m+1}-\eta_{ijm}}{v\tau}+L_1[\eta_{ij,m+1}]=L_2[\eta_{ijm}]+w_{ijm},\\
&\eta_{nj,m+1}=0 \qquad \text{при } j=1, 2, \ldots, N_1,\\
&l[\eta_{0j,m+1}]=r_{jN}(t_{m+1}) \quad \text{при } j=N_1+1, \ldots, N,\\
&\eta_{ij0}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Пусть

$$|w_{ijm}| \leqslant \frac{\tau}{2v}N_2+\frac{h}{2}M_2+R_N,$$

$$|R_{jN}(z, t)| \leqslant R_N, \quad |r_{jN}(t)| \leqslant r_N \quad (0 \leqslant z \leqslant H, \ 0 \leqslant t \leqslant T).$$

На основании теоремы 1 дадим оценку решению задачи (14):

$$\max_{ijm}|\eta_{ijm}| \leqslant vT\max_{ijm}|w_{ijm}|+\frac{T}{\tau}\max_{j,m}|r_{jN}| \leqslant$$

$$\leqslant vT\left(\frac{\tau}{2v}N_2+\frac{h}{2}M_2+R_N\right)+\frac{T}{\tau}r_N.$$

Таким образом имеет место следующая

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1 и условия (15), то имеет место оценка погрешности*

$$\max_{ijm}|I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m)-I_{ijm}| \leqslant vT\left(\frac{\tau}{2v}N_2+\frac{h}{2}M_2+R_N\right)+\frac{T}{\tau}r_N. \tag{17}$$

Более общей разностной схемой для решения уравнения (1) является схема

$$\frac{I_{ij,m+1}-I_{ijm}}{v\tau}+\lambda L_1[I_{ij,m+1}]+(1-\lambda)L_1[I_{ijm}]=L_2[I_{ijm}]+f_{ijm}, \tag{18}$$

где $(i, j)\in J$, $m=0, 1, \ldots, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$ и где L_1, L_2 даны соотношениями (7). Как частный случай при $\lambda=1$ получаем отсюда схему (6).

Систему (18) можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{v\tau}-\lambda\frac{\mu_j}{h}+\lambda\sigma_{ijm}\right)I_{ij,m+1}+\lambda\frac{\mu_j}{h}I_{i+1,j,m+1}=\\
&=\left[\frac{1}{v\tau}+(1-\lambda)\frac{\mu_j}{h}-(1-\lambda)\sigma_{ijm}\right]I_{ijm}-(1-\lambda)\frac{\mu_j}{h}I_{i+1,jm}+\\
&+\sum_{k=1}^{N}A_k\gamma_{ijkm}I_{ikm}+f_{ijm} \qquad \text{при } j=1, 2, \ldots, N_1,\\
&\left(\frac{1}{v\tau}+\lambda\frac{\mu_j}{h}+\lambda\sigma_{ijm}\right)I_{ij,m+1}-\lambda\frac{\mu_j}{h}I_{i-1,j,m+1}=\\
&=\left[\frac{1}{v\tau}-(1-\lambda)\frac{\mu_j}{h}-(1-\lambda)\sigma_{ijm}\right]I_{ijm}+(1-\lambda)\frac{\mu_j}{h}I_{i-1,jm}+\\
&+\sum_{k=1}^{N}A_k\gamma_{ijkm}I_{ikm}+f_{ijm} \qquad \text{при } j=N_1+1, \ldots, N.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Все коэффициенты системы (19) положительны, если

$$v\tau\leqslant\frac{h}{(1-\lambda)(|\mu_j|+h\sigma_{ijm})} \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1).$$

Последнее условие удовлетворено при $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, если

$$v\tau\leqslant\frac{h}{(1-\lambda)(1+h\max\limits_{ijm}\sigma_{ijm})}. \tag{20}$$

При помощи принципа максимума можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 1, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ *и*

$$\frac{\tau}{h}\leqslant\frac{1}{v(1-\lambda)(1+h\max\limits_{ijm}\sigma_{ijm})},$$

то решение разностной задачи {(18), (8)} *удовлетворяет неравенству* (13).

Также можно показать, что при выполнении условия (20) имеет место теорема 2 с оценкой погрешности (17).

Из этого неравенства видим, что погрешность решения схем (6) и (18) имеет порядок $O(h+\tau)$, если при $N\to\infty$, $h\to 0$ и $\tau\to 0$, $R_N=O(h+\tau)$ и $\frac{1}{\tau}r_N=O(h+\tau)$. Рассмотрим еще разностную схему, у которой (при некоторых предположениях) погрешность имеет порядок $O(h^2+\tau)$. Используем для аппроксимации уравнения (1) алгебраическую систему

$$\frac{I_{ij,m+1}-I_{ijm}}{v\tau}+\Lambda_1[I_{ij,m+1}]=\Lambda_2[I_{ijm}]+F_{ijm}, \tag{21}$$

где $(i, j) \in J$, $m = 0, 1, \ldots$ и

$$
\left.
\begin{aligned}
\Lambda_1[I_{ij,m+1}] &= \begin{cases} \mu_j \dfrac{I_{i+1,j,m+1} - I_{ij,m+1}}{h} + \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{ijm} I_{ij,m+1} + \sigma_{i+1,jm} I_{i+1,j,m+1}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1, \\ \mu_j \dfrac{I_{ij,m+1} - I_{i-1,j,m+1}}{h} + \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{ijm} I_{ij,m+1} + \sigma_{i-1,jm} I_{i-1,j,m+1}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N, \end{cases} \\
\Lambda_2[I_{ijm}] &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} A_k \left(\gamma_{ijkm} I_{ikm} + \gamma_{i+1,jkm} I_{i+1,km}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1, \\ \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} A_k \left(\gamma_{ijkm} I_{ikm} + \gamma_{i-1,jkm} I_{i-1,km}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N, \end{cases} \\
F_{ijm} &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(f_{ijm} + f_{i+1,jm}\right) & \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1, \\ \dfrac{1}{2}\left(f_{ijm} + f_{i-1,jm}\right) & \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N. \end{cases}
\end{aligned}
\right\} \tag{22}
$$

Если выписать разностную схему $\{(21), (8)\}$ более подробно, получим

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{v\tau} - \frac{2\mu_j}{h} + \sigma_{ijm}\right) I_{ij,m+1} + \left(\sigma_{i+1,jm} + \frac{2\mu_j}{h}\right) I_{i+1,j,m+1} = \\
&= \frac{2}{v\tau} I_{ijm} + \sum_{k=1}^{N} A_k \left(\gamma_{ijkm} I_{ikm} + \gamma_{i+1,jkm} I_{i+1,km}\right) + f_{ijm} + f_{i+1,jm} \\
&\qquad\qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1, \\
&\left(\frac{2}{v\tau} + \frac{2\mu_j}{h} + \sigma_{ijm}\right) I_{ij,m+1} + \left(\sigma_{i-1,jm} - \frac{2\mu_j}{h}\right) I_{i-1,j,m+1} = \\
&= \frac{2}{v\tau} I_{ijm} + \sum_{k=1}^{N} A_k \left(\gamma_{ijkm} I_{ikm} + \gamma_{i-1,jkm} I_{i-1,km}\right) + f_{ijm} + f_{i-1,jm} \\
&\qquad\qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N, \\
&I_{nj,m+1} = \alpha_{j,m+1} \qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, N_1, \\
&I_{0j,m+1} = \sum_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jkm} I_{0k,m+1} + \beta_{j,m+1} \qquad \text{при } j = N_1 + 1, \ldots, N, \\
&I_{ij0} = \Psi_{ij}.
\end{aligned}
$$

Видим, что при помощи этой схемы приближенное решение I_{ijm} задачи $\{(1)—(3)\}$ вычисляется почти так же просто, как при помощи схемы $\{(6), (8)\}$. Вполне аналогичным является исследование устойчивости и точности разностных схем $\{(21), (8)\}$ и $\{(6), (8)\}$. При помощи принципа максимума получаем следующие результаты.

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то решение разностной задачи* $\{(21), (8)\}$ *удовлетворяет неравенству* (13).

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и*

$$
\left|\frac{\partial^2 I(z, \mu, \varphi, t)}{\partial t^2}\right| \leqslant N_2, \qquad \left|\frac{\partial^3 I(z, \mu, \varphi, t)}{\partial z^3}\right| \leqslant M_3
$$

при $0 \leqslant z \leqslant H$, $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *то имеет место оценка погрешности*

$$\max_{ijm} \left| I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m) - I_{ijm} \right| \leqslant vT \left(\frac{\tau}{2v} N_2 + \frac{h^2}{24} M_3 + R_N \right) + \frac{T}{\tau} r_N,$$

где $I(z_i, \mu_j, \varphi_j, t_m)$ — *значение точного решения задачи* $\{(1)-(3)\}$ *и* I_{ijm} — *решение задачи* $\{(21), (8)\}$.

§ 3. Разностные схемы решения стационарного уравнения переноса

Рассмотрим стационарное уравнение переноса для анизотропного рассеяния в плоско-параллельном слое

$$\mu \frac{\partial I(z, \mu, \varphi)}{\partial z} + \sigma(z, \mu, \varphi) I(z, \mu, \varphi) =$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \gamma(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi') I(z, \mu', \varphi') d\mu' \, d\varphi' + f(z, \mu, \varphi) \tag{23}$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} & I(H, \mu, \varphi) = \alpha(\mu, \varphi) && \text{при } \mu < 0, \\ & I(0, \mu, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{0} \delta(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(0, \mu' \varphi') d\mu' \, d\varphi' + \beta(\mu, \varphi) && \text{при } \mu > 0 \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

и рассмотрим соответствующую аппроксимацию

$$L_1[I_{ij}] = L_2[I_{ij}] + f_{ij} \quad \text{при} \quad (i, j) \in J, \tag{25}$$

$$\left. \begin{aligned} & I_{nj} = \alpha_j && \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, N_1, \\ & l[I_{0j}] = \beta_j && \text{при} \quad j = N_1 + 1, \ldots, N. \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

Задача $\{(23), (24)\}$ и ее аппроксимация $\{(25), (26)\}$ рассматривались в [6].

В дальнейшем предположим, что величины σ, f, α, β, γ и δ не зависят от t. Члены L_1 и L_2 системы (25) даны соотношениями (7). Для решения системы уравнений $\{(25), (26)\}$ получится итерационный процесс, если составить соответствующее нестационарное уравнение (берем $v = 1$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I(z, \mu, \varphi, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial I(z, \mu, \varphi, t)}{\partial z} + \sigma(z, \mu, \varphi) I(z, \mu, \varphi, t) = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \gamma(z, \mu, \varphi, \mu', \varphi') I(z, \mu', \varphi', t) d\mu' \, d\varphi' + f(z, \mu, \varphi) \end{aligned} \tag{27}$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} & I(H, \mu, \varphi, t) = \alpha(\mu, \varphi) && \text{при} \quad \mu < 0, \\ & I(0, \mu, \varphi, t) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{0} \delta(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(0, \mu', \varphi', t) d\mu' \, d\varphi' + \beta(\mu, \varphi) \\ & && \text{при} \quad \mu > 0 \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

и с начальным условием $I(z, \mu, \varphi, 0) = \Psi(z, \mu, \varphi)$ и если составить соответствующую этому уравнению аппроксимацию

$$\frac{I_{ij,m+1} - I_{ijm}}{\tau} + L_1[I_{ij,m+1}] = L_2[I_{ijm}] + f_{ij} \quad \text{при} \quad (i, j) \in J, \tag{29}$$

$$\left. \begin{aligned} & I_{nj,m+1} = \alpha_j && \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, N_1, \\ & l[I_{0j,m+1}] = \beta_j && \text{при} \quad j = N_1 + 1, \ldots, N, \\ & I_{ij0} = \Psi_{ij}. \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

Таким образом получаем итерационный процесс:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}I_{ij,m+1}+L_1[I_{ij,m+1}]=\frac{1}{\tau}I_{ijm}+L_2[I_{ijm}]+f_{ij},\\&I_{nj,m+1}=\alpha_j\quad\text{при}\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,N_1,\\&l[I_{0j,m+1}]=\beta_j\quad\text{при}\quad j=N_1+1,\,\ldots,\,N,\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

где $\tau>0$ — некоторый параметр, $I_{ij0}=\Psi_{ij}$ — начальное приближение и $m=0,1,\ldots$

В § 2 доказано, что решение разностной схемы {(29), (30)} удовлетворяет условию (13). Можно доказать нижеследующую теорему (см. [6] и теорему 7).

Теорема 6. *Если выполнены условие* (5) *и*

$$\sigma_{ij}-\sum_{k=1}^{N}A_k\gamma_{ijk}\geqslant c>0,\quad \sigma_{ij}\geqslant s\geqslant c\tag{32}$$

при $i=0,1,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,N$, *то итерационный процесс* (31) *сходится со скоростью*

$$\max_{ij}|I_{ijm}-I_{ij}|\leqslant\frac{q^m}{1-q}\max_{ij}|I_{ij1}-I_{ij0}|\quad(m=0,\,1,\,\ldots),\tag{33}$$

где I_{ij} — *точное решение системы* {(25), (26)} *и*

$$q=\max_{ij}\frac{1+\tau\sum\limits_{k=1}^{N}A_k\gamma_{ijk}}{1+\tau\sigma_{ij}}\quad(\tau>0).$$

Из условий (32) следует, что множитель сходимости q тем меньше, чем больше τ. Таким образом, с точки зрения полученной оценки наилучшим является итерационный процесс (31) при $\tau=+\infty$, который и исследовался в работе [6].

Более общий итерационный процесс получаем, если для решения задачи {(27), (28)} применяем схему (18).

Более точной аппроксимацией уравнения (23) является

$$\Lambda_1[I_{ij}]=\Lambda_2[I_{ij}]+F_{ij},\tag{34}$$

где $(i,j)\in J$ и Λ_1, Λ_2, F_{ij} определены соотношениями (22). Для решения системы {(34), (26)} итерационный процесс получаем, если уравнение (27) аппроксимируем разностным уравнением (21). Этот итерационный процесс можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}I_{ij,m+1}+\Lambda_1[I_{ij,m+1}]=\frac{1}{\tau}I_{ijm}+\Lambda_2[I_{ijm}]+F_{ij},\\&I_{nj,m+1}=\alpha_j\quad\text{при}\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,N_1,\\&l[I_{0j,m+1}]=\beta_j\quad\text{при}\quad j=N_1+1,\,\ldots,\,N.\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

При доказательстве сходимости этого итерационного процесса применяем лемму Коллатца (см. [7], с. 128). На основании предположений, сделанных в § 1, система алгебраических уравнений (35) удовлетворяет условиям этой леммы, если прибавим предположение

$$\sigma_{ij}\leqslant\frac{2}{h}|\mu_j|\leqslant\frac{2}{h}\quad(i\neq0,\,n;\;j=1,\,2,\,\ldots,\,n).\tag{36}$$

Из соотношений (35) получим

$$I_{ij,m+1}-I_{ijm}+\tau\Lambda_1[I_{ij,m+1}-I_{ijm}]=I_{ijm}-I_{ij,m-1}+\tau\Lambda_2[I_{ijm}-I_{ij,m-1}],$$
$$I_{nj,m+1}-I_{njm}=0,$$
$$l[I_{0j,m+1}-I_{0jm}]=0.$$

Пусть известна оценка

$$|I_{ijm} - I_{ij,m-1}| \leqslant \Delta_{m-1} \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

тогда

$$|I_{ijm} - I_{ij,m-1} + \tau\Lambda_2[I_{ijm} - I_{ij,m-1}]| \leqslant$$
$$\leqslant |I_{ijm} - I_{ij,m-1}| + \tau\,|\Lambda_2[I_{ijm} - I_{ij,m-1}]| \leqslant \Delta_{m-1} + \tau\Lambda_2[\Delta_{m-1}].$$

На основании леммы Коллатца величина Δ_m, удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} &\Delta_m + \tau\Lambda_1[\Delta_m] \geqslant \Delta_{m-1} + \tau\Lambda_2[\Delta_{m-1}], \\ &\Delta_m \geqslant 0,\ \ l[\Delta_m] \geqslant 0, \end{aligned} \tag{37}$$

является оценкой

$$|I_{ij,m+1} - I_{ijm}| \leqslant \Delta_m.$$

Ввиду предположения (5) неравенство $l[\Delta_m] \geqslant 0$ вытекает из неравенства $\Delta_m \geqslant 0$. Неравенство (37) или

$$\Delta_m \left[1 + \frac{\tau}{2}\,(\sigma_{ij} + \sigma_{i+1,j}) \right] \geqslant$$
$$\geqslant \Delta_{m-1} \left[1 + \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^{N} A_k (\gamma_{ijk} + \gamma_{i+1,jk}) \right] \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_1)$$

имеет место, если $\Delta_m = q\Delta_{m-1}$, где

$$q = \max_{ij} \frac{1 + \frac{\tau}{2} \sum\limits_{k=1}^{N} A_k (\gamma_{ijk} + \gamma_{i+1,jk})}{1 + \frac{\tau}{2}\,(\sigma_{ij} + \sigma_{i+1,j})}.$$

(Если $j = N_1 + 1,\ \ldots,\ N$, тогда в двух предыдущих соотношениях индекс i следует заменить индексом $i - 1$). Из условия (32) следует

$$q \leqslant \frac{1 + \tau(s - c)}{1 + \tau s} = 1 - \frac{\tau c}{1 + \tau s} < 1.$$

Результат показывает, что итерационный процесс (35) сходится тем скорее, чем больше параметр τ. Оптимальным значением параметра является $\tau = +\infty$, что дает указанный в работе [6] итерационный процесс.

Теорема 7. *Если выполнены условия* (5), (32) *и* (36), *то итерационный процесс* (35) *сходится со скоростью* (33).

Величины $I_{ij,m+1}$ по формулам (35) можно вычислить следующим образом: если $j = 1, 2,\ \ldots,\ N_1$, то $I_{nj,m+1} = \alpha_j$ и

$$I_{ij,m+1} = \frac{1}{h(2 + \tau\sigma_{ij}) - 2\mu_j\tau} \bigl[2hI_{ijm} - \tau(2\mu_j + h\sigma_{i+1,j}) I_{i+1,j,m+1} +$$
$$+ \tau h \sum_{k=1}^{N} A_k (\gamma_{ijk} I_{ikm} + \gamma_{i+1,jk} I_{i+1,km}) + \tau h (f_{ij} + f_{i+1,j}) \bigr]$$
$$(i = n - 1,\ \ldots,\ 0);$$

если $j = N_1 + 1,\ \ldots,\ N$, то $I_{0j,m+1} = \sum\limits_{k=1}^{N_1} A_k \delta_{jk} I_{0k,m+1} + \beta_j$ и

$$I_{ij,m+1} = \frac{1}{h(2 + \tau\sigma_{ij}) + 2\mu_j\tau} \bigl[2hI_{ijm} + \tau(2\mu_j - h\sigma_{i-1,j}) I_{i-1,j,m+1} +$$
$$+ \tau h \sum_{k=1}^{N} A_k (\gamma_{ijk} I_{ikm} + \gamma_{i-1,jk} I_{i-1,km}) + \tau h (f_{ij} + f_{i-1,j}) \bigr]$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И., Яненко Н. Н., ДАН СССР, **157**, № 6 (1964).
2. Владимиров В. А., Уравнения математической физики, М., 1967.
3. Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961.
4. Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., 1963.
5. Годунов С. К., Рябенький В. С., Введение в теорию разностных схем, М., 1962.
6. Тамме Э., Сырмус И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, 412 (1967).
7. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., 1953.

Таллинский политехнический институт

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
7/VII 1969

INGRID SÕRMUS, E. TAMME

MITTESTATSIONAARSE ÜLEKANDEVÕRRANDI LAHENDAMISEST DIFERENTSMEETODIGA

Vaadeldakse mittestatsionaarset ülekandevõrrandit (1) rajatingimustega (2) ja algtingimustega (3). Võrrandi ligikaudseks lahendamiseks antakse kolm diferentsskeemi {(6), (8)}, {(18), (8)} ja {(21), (8)} ning tõestatakse maksimumprintsiibi abil nende stabiilsus algtingimuste ja vabaliikmete suhtes, samuti koonduvus. Igale diferentsskeemile vastab iteratsiooniprotsess statsionaarse võrrandi lahendamiseks.

INGRID SÕRMUS, E. TAMME

ON THE SOLUTION OF THE NONSTATIONARY TRANSPORT EQUATION BY DIFFERENCE METHOD

Nonstationary transport equation (1) with boundary conditions (2) and initial conditions (3) is considered. For the approximate solution of the equation, three difference schemes {(6), (8)}, {(18), (8)} and {(21), (8)} are given, their stability relative to initial conditions and right side, and convergence having been proved by application of maximum principle. To each difference scheme corresponds an iteration process for solving the stationary equation.