EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.02

О. ВААРМАНН

О ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работах [1, 2] рассматривались некоторые итерационные процессы для решения операторного уравнения $F(x)=0$ в банаховом пространстве в предположении, что существует обратный оператор $[F'(x)]^{-1}$.

Здесь будет рассмотрено распространение такого рода методов на случай, где производная $F'(x)$ может не иметь обратного оператора, а также будут приведены условия сходимости построенных итерационных процессов к стационарной точке функционала $\varphi(x)=\|F(x)\|^2$, где $F(x)$ — некоторый (в общем нелинейный) оператор из одного гильбертова пространства H_1 в другое H_2. В частности, когда $F(x)$ действует из E_n в E_m, распространения модифицированного и основного метода Ньютона на случай $m\neq n$ и на случай особенной $F'(x)$ приведены соответственно в [3] и [4]. Отметим, что для аналога основного метода Ньютона в [4] доказана только линейная скорость сходимости, однако оказывается, что в некоторых случаях скорость сходимости квадратична.

Нахождение обобщенного обратного оператора $[F'(x)]^+$ даже в конечномерном случае — трудоемкий и сложный процесс, требующий иногда дополнительной информации об операторе $F'(x)$ (напр., информации о ранге матрицы $F'(x)$ [11], который в свою очередь зависит от ошибок округления, или о проекторе из пространства E_m на область значений матрицы $F'(x)$ [5]).

Поэтому представляют интерес методы, которые вместо обобщенных обратных используют приближенные операторы, построение которых относительно просто и которые требуют мало информации об операторе $F'(x)$.

Изучение сходимости итерационных процессов, основанных на последовательной аппроксимации обобщенного обратного оператора [7], и является содержанием данной статьи.

Рассмотрим функционал

$$\varphi(x)=\|F(x)\|^2, \tag{1}$$

где $F(x)$ — оператор из одного гильбертова пространства H_1 в другое H_2.

В предположении, что $F'(x)$ существует, из необходимого условия стационарности $\operatorname{grad}\varphi(x)=0$, получаем

$$[F'(x)]^*F(x)=0. \tag{2}$$

Для решения последнего построим итерационную последовательность

$$x_{k+1}=x_k-A_kF(x_k) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{3}$$

где A_k — операторы, приближенные к обобщенным обратным, понимаемым в смысле определения, приведенного в [6].

При дополнительных предположениях, что $F'(x)$ ограничен и имеет замкнутую область значений, по определению [6] существует единственный обобщенный обратный оператор $[F'(x)]^+$, причем нетрудно видеть, что норма оператора $[F'(x)]^+$ ограничена [7].

Ниже приведем некоторые соотношения, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пусть A — некоторый ограниченный линейный оператор из H_1 в H_2, имеющий замкнутую область значений $R(A)$, а A^* и A^+ — соответственно его сопряженный и обобщенный обратный операторы, тогда [6, 7]

$$R(A^+) = R(A^*), \tag{4}$$
$$AA^+ = P_{R(A)}, \tag{5}$$
$$A^+A = P_{R(A^*)}, \tag{6}$$
$$AA^+A = A, \tag{7}$$
$$A^+AA^+ = A^+, \tag{8}$$
$$A^*AA^+ = A^* = A^+AA^*, \tag{9}$$

где $P_{R(A)}$ и $P_{R(A^*)}$ — соответственно операторы ортогонального проектирования H_2 на $R(A)$ и H_1 на $R(A^*)$.

Введем следующие обозначения:

$$R(F'(x)) = R(x), \qquad P_{R(F'(x_k))} = P_k; \tag{10}$$

$$R([F'(x)]^*) = R^*(x), \quad P_{R([F'(x_k)]^*)} = P_k^*. \tag{11}$$

Далее для построения A_k используем итерационные процессы для нахождения обобщенного обратного [7].

1. Сначала приведем одну общую теорему о сходимости итерационных процессов вида (3) для случая $R(x_{k+1}) \subseteq R(x_k)$.

Теорема 1. *Пусть* $x_0 \in H_1$, $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ *и на* S *выполнены следующие условия*:

1° *оператор* $F(x)$ *дифференцируем* (*по Фреше*);

2° *производная* $F'(x)$ *имеет замкнутую область значений и удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leqslant L\|x - y\|;$$

3° $\|P_kF(x_k) - F'(x_k)A_kF(x_k)\| \leqslant \gamma_k\|P_kF(x_k)\|, \quad A_k = A_kP_k;$

4° $\|A_k\| \leqslant \lambda, \quad k = 0, 1, \ldots;$

5° $\delta_0 = \gamma + \frac{1}{2}\lambda^2L\|P_0F(x_0)\| < 1.$

Тогда, если 1) $\gamma_k \leqslant \gamma$ *и* $r_1 = \lambda\|P_0F(x_0)\|/(1 - \delta_0) \leqslant \varrho$, *то уравнение* $[F'(x)]^*F(x) = 0$ *имеет решение* x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r_1$, *к которому сходится последовательность* (3), *причем*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1\delta_0^k;$$

а если $\gamma \geqslant \gamma_0 \geqslant \gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_k \geqslant \ldots \geqslant 0$ *при* $k \to \infty$, *то получаем сверхлинейную скорость сходимости, т. е.*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1 \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i \quad (k \geqslant 1),$$

где $\delta_i = \gamma_i + \frac{1}{2}L\lambda^2\|P_iF(x_i)\|$, *и* $\delta_i \to 0$ *при* $i \to \infty$.

2) *Если* $\gamma_k = 0$ *и* $r_2 = (2/L\lambda)H_0(\delta_0) \leqslant \varrho$, *где*

$$H_k(\delta_0) = \sum_{i=k}^{\infty} \delta_0^{2^i},$$

то уравнение $[F'(x)]^*F(x)=0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0-x^*\|\leqslant r_2$, *к которому сходится последовательность* (3), *причем*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant(2/L\lambda)H_k(\delta_0).$$

Доказательство. Если $R(x_{k+1})\subseteq R(x_k)$, то по лемме (см. [8] с. 181)

$$P_{k+1}P_k=P_kP_{k+1}=P_{k+1}.$$

Пусть Z — фиксированный элемент, тогда

$$P_{R(Z)}F(x+y)=P_{R(Z)}F(x)+\int_0^1 P_{R(Z)}F'(x+ty)y\,dt, \tag{12}$$

поэтому

$$P_{k+1}F(x_{k+1})=P_{k+1}F(x_k)-P_{k+1}F'(x_k)A_kF(x_k)+R,$$

где

$$R=\int_0^1 P_{k+1}[F'(x_k)-F'(x_k+t(x_{k+1}-x_k))]A_kF(x_k)\,dt. \tag{13}$$

Учитывая, что $P_{k+1}P_k=P_{k+1}$ и $A_k=A_kP_k$, получаем

$$\|P_{k+1}F(x_k)-P_{k+1}F'(x_k)A_kF(x_k)\|\leqslant\gamma_k\|P_kF(x_k)\|,$$

$$\|R\|\leqslant\|P_{k+1}\|\,\|A_kF(x_k)\|\,L\int_0^1\|t(x_{k+1}-x_k)\|\,dt\leqslant\frac{1}{2}L\lambda^2\|P_kF(x_k)\|^2$$

и окончательно имеем

$$\|P_{k+1}F(x_{k+1})\|\leqslant\left(\gamma_k+\frac{1}{2}L\lambda^2\|P_kF(x_k)\|\right)\|P_kF(x_k)\|=\delta_k\|P_kF(x_k)\|.$$

Дальше, аналогично [9] получаем для случая $\gamma\neq0$

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant\lambda\|P_0F(x_0)\|\delta_0^k, \tag{14}$$

$$\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\delta_0^k, \tag{15}$$

$$\|x_0-x_k\|\leqslant r_1(1-\delta_0^k)\leqslant r_1\leqslant\varrho, \tag{16}$$

а если $\gamma_k\to0$ при $k\to\infty$, то аналогично [1]

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant\lambda\|P_0F(x_0)\|\prod_{i=0}^{k-1}\delta_i\qquad(k\geqslant1). \tag{17}$$

При $\gamma_k=0$ (см. [9])

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant(2/L\lambda)\,\delta_0^{2^k}, \tag{18}$$

$$\|x_k-x^*\|\leqslant(2/L\lambda)H_k(\delta_0), \tag{19}$$

$$\|x_0-x_k\|\leqslant(2/L\lambda)H_0(\delta_0)=r_2\leqslant\varrho.$$

На основании вышеизложенного заключаем, что

$$x^*=\lim_{k\to\infty}x_k,\qquad P_{R(x^*)}=F(x^*)=0.$$

Очевидно

$$\|[F'(x)]^*\|=\|F'(x)\|\leqslant\|F'(x_0)\|+L\varrho,$$

поэтому, используя (5) и (9), имеем

$$\|[F'(x)]^*F(x)\|=\|[F'(x)]^*F'(x)[F'(x)]^+F(x)\|\leqslant\|[F'(x)]^*\|\,\|P_{R(x)}F(x)\|,$$

и, следовательно, решение x^* уравнения $P_{R(x)}F(x)=0$ является и решением уравнения (2).

Следствие 1. В частном случае, если $A_k = [F'(x_k)]^+$, то в силу (5) и (8) $A_k = A_k P_k$ и тогда при $R(x_{k+1}) \subseteq R(x_k)$ аналог основного метода Ньютона сходится к решению уравнения $[F'(x)]^* F(x) = 0$ с квадратичной скоростью, т. е.

$$\|x_k - x^*\| \leqslant (2/LC) H_k(\delta_0).$$

Здесь использовано обозначение $\|[F'(x)]^+\| \leqslant C$ (ср. теорема 1 [4]).

Следствие 2. Пусть

$$A_k = \alpha_k [F'(x_k)]^*, \tag{20}$$

$$A_k = 2\alpha_k [F'(x_k)]^* - \alpha_k^2 [F'(x_k)]^* F'(x_k) [F'(x_k)]^*, \tag{21}$$

где $0 < \alpha_k \leqslant \frac{2}{M^2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $\|F'(x)\| \leqslant M$.

Обозначим

$$\|P_k - \alpha_k F'(x_k) [F'(x_k)]^*\| = \mu_k \text{ и } \mu = \sup_k \{\mu_k\}, \tag{22}$$

тогда для (20) согласно (9)

$$A_k = A_k P_k,$$
$$\gamma_k = \mu_k \leqslant \mu,$$

а для норм

$$\|A_k\| \leqslant \left(\frac{2}{M^2} - \varepsilon\right) M = \lambda.$$

Убедимся теперь, что $\mu < 1$.

Рассмотрим сужения $[\overline{F'}(x_k)]^*$ и $\overline{I}_2$ соответственно для операторов $[F'(x_k)]^*$ и I_2 на множество $R(x_k)$, где I_2 — единичный оператор в H_2, и сужение $[\overline{F'}(x_k)]$ для оператора $F'(x_k)$ на множество $R^*(x_k)$. Так как $[F'(x_k)]^*$ изображает множество $R(x_k)$ на $R^*(x_k)$ взаимно-однозначно [6], то существует $([\overline{F'}(x_k)]^*)^{-1}$ ([8] с. 155), и по ([8], см. теорему 2.(2.V))

$$\|[\overline{F'}(x_k)]^* y\| \geqslant m\|y\|,$$

где $m > 0$ для всех $y \in R(x_k)$. Отсюда следует, что существуют такие положительные числа (см. [10]), что

$$\|\overline{I}_2 - \alpha_k \overline{F'}(x_k) [\overline{F'}(x_k)]^*\| < 1.$$

Если $y \in R(x_k)^\perp$ и $R(x_k)^\perp$ — ортогональное дополнение множества $R(x_k)$, то $\|P_k - \alpha_k F'(x_k) [F'(x_k)]^*\| = 0$ (см. [6]), и таким образом

$$\mu_k = \|P_k - \alpha_k F'(x_k) [F'(x_k)]^*\| = \|\overline{I}_2 - \alpha_k \overline{F'}(x_k) [\overline{F'}(x_k)]^*\| < 1.$$

В случае, когда оператор A_k определен по (21), имеем

$$A_k = A_k P_k,$$

$$\|A_k\| \leqslant \alpha_k \|[F'(x_k)]^*\| (1 + \|P_k - \alpha_k F'(x_k) [F'(x_k)]^*\|) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{M^2} - \varepsilon\right) M (1 + \mu) = \lambda,$$

$$\|P_k F(x_k) - F'(x_k) A_k F(x_k)\| \leqslant \|P_k - F'(x_k) A_k\| \|P_k F(x_k)\| = \mu^2 \|P_k F(x_k)\|$$

и тогда

$$\gamma_k = \mu_k^2 \leqslant \mu^2.$$

Замечание 1. Для построения A_k можно использовать итерационные процессы высшего порядка, например:

$$A_k = \alpha_k [F'(x_k)]^* \{3P_k - 3\alpha_k F'(x_k) [F'(x_k)]^* + \alpha_k^2 F'(x_k) [F'(x_k)]^* F'(x_k) [F'(x_k)]^*\}, \tag{22a}$$

тогда

$$\|A_k\| \leqslant \left(\frac{2}{M^2} - \varepsilon\right) M(1 + \mu + \mu^2) = \lambda$$

и

$$\gamma_k = \mu_k^3 \leqslant \mu^3.$$

Замечание 2. Характерной чертой для итерационных процессов, где в качестве A_k использованы (21) или (22а), является то, что у нас нет необходимости искать A_k в явном виде и для построения приближения X_{k+1} достаточно лишь последовательно применить операторы $[F'(x_k)]^*$ и $F'(x_k)$ к элементу $F(x_k)$, что сокращает вычислительную работу.

2. В предыдущем мы требовали, чтобы $A_k = A_k P_k$. В этом пункте мы рассмотрим такие A_k, которые удовлетворяют условию $A_k = A_k P_0$. Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k), & (23) \\ A_{k+1} = A_k + \alpha_{k+1}[F'(x_{k+1})]^*[I_2 - F'(x_{k+1})A_k], & (24) \end{cases}$$

где I_2 — единичный оператор в H_2. Пусть на сфере $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \leqslant \varrho\}$ даны следующие условия:

$$\|A_k\| \leqslant \lambda_k, \tag{25}$$

$$\|P_{k+1} - F'(x_{k+1})A_{k+1}\| \leqslant \gamma_{k+1}, \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{26}$$

$$\|P_{k+1} - F'(x_{k+1})A_k\| \leqslant \beta_k, \tag{27}$$

$$\|[F'(x)]^+\| \leqslant C, \tag{28}$$

$$\|F'(x)\| \leqslant M. \tag{29}$$

Введем следующие обозначения, причем для λ_k $(k = 0,1)$ и γ_k $(k = 0)$ выполнены (31)—(33):

$$L_2 = CL + ML_1, \tag{30}$$

$$\lambda_0 = C(1 + \gamma_0)/(1 - L_2 r_1^{(0)}), \tag{31}$$

$$\lambda_1 = C(1 + \mu\beta_0)/(1 - L_2 r_1^{(0)}), \tag{32}$$

$$\gamma_0 = \max\{\mu\beta_0, \|P_0 - F'(x_0)A_0\|\}, \tag{33}$$

$$\delta_k = \gamma_k + L_2 r_1^{(0)} + \frac{1}{2} L\lambda_k^2 \|P_0 F(x_k)\|, \tag{34}$$

$$r_1^{(k)} = \lambda_0 \|P_0 F(x_0)\| / (1 - \delta_k). \tag{35}$$

Теорема 2. *Пусть* $x \in H_1$, $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ *и на* S *выполнены следующие условия:*

1° *оператор* $F(x)$ *дифференцируем (по Фреше);*

2° *производная* $F'(x)$ *имеет замкнутую область значений и удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leqslant L\|x - y\|;$$

3° A_0 — *произвольный линейный оператор, удовлетворяющий условию*

$$A_0 = A_0 P_0 = P_0^* A_0;$$

4° $\|[F'(u)]^+ - [F'(v)]^+\| \leqslant L_1 \|u - v\|;$

5° $\delta_0 = \gamma_0 + L_2 r_1^{(0)} + \frac{1}{2} L\lambda_0^2 \|P_0 F(x_0)\| < 1;$

6° $\beta_1 = \mu\beta_0 + (\lambda_1 L_2 + \lambda_1^2 L)\,\|P_0 F(x_0)\| \cdot \delta_0 \leqslant \beta_0$.

Тогда, если $R(x_0) \supseteq R(x)$ *для всех* $x \in S$, $r_1^{(0)} = \lambda_0\|P_0F(x_0)\|/(1-\delta_0) \leqslant \leqslant \varrho$, *то уравнение* $[F'(x)]^* F(x) = 0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant \leqslant r_1^{(0)}$, *к которому сходится последовательность* (23)—(24), *причем*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1^{(k)} \delta_0^k .$$

Доказательство. Отметим, что при $A_0 = \alpha_0 [F'(x_0)]^*$ или при $A_0 = [F'(x_0)]^+$ выполнено условие 3°.

Если $R(x_0) \supseteq R(x)$, то по ([8], см. лемму)

$$P_0 P_k = P_k P_0 = P_k \tag{36}$$

и на основании (5), (9)

$$[F'(x_k)]^* = [F'(x_k)]^* P_k = [F'(x_k)]^* P_k P_0 = [F'(x_k)]^* P_0. \tag{37}$$

Допустим, что $A_k = A_k P_0$, тогда из (24), (37) легко видеть, что

$$A_{k+1} = A_{k+1} P_0 \tag{38}$$

и в силу (5), (7) и (24)

$$\|P_{k+1} - F'(x_{k+1}) A_{k+1}\| = \|P_{k+1} - F'(x_{k+1}) A_k -$$
$$- \alpha_{k+1} F'(x_{k+1}) [F'(x_{k+1})]^* (P_{k+1} - F'(x_{k+1}) A_k)\| =$$
$$= \|(P_{k+1} - \alpha_{k+1} F'(x_{k+1}) [F'(x_{k+1})]^*)(P_{k+1} - F'(x_{k+1}) A_k)\| = \mu_{k+1}\beta_k,$$

так что можно принять

$$\gamma_{k+1} = \mu_{k+1}\beta_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{39}$$

причем $\mu_{k+1} \leqslant \mu < 1$ (см. следствие 2).

Нетрудно видеть, что проекторы $P_{R(x)}$ и $\overset{*}{P}_{R(u)}$ удовлетворяют условию Липшица с константой $L_2 = CL + ML_1$. В самом деле,

$$\|P_{R(x)} - P_{R(y)}\| = \|F'(x)[F'(x)]^+ - F'(x)[F'(y)]^+ + F'(x)[F'(y)]^+ -$$
$$- F'(y)[F'(y)]^+\| \leqslant ML_1\|x-y\| + CL\|x-y\| = L_2\|x-y\| \tag{40}$$

и совершенно аналогично

$$\|\overset{*}{P}_{R(u)} - \overset{*}{P}_{R(v)}\| \leqslant L_2\|u - v\|. \tag{41}$$

Согласно (5), (6), (16), (26), (28), (41) имеем

$$\|A_k\| = \|[F'(x_k)]^+ + A_k - [F'(x_k)]^+\| = \|[F'(x_k)]^+ +$$
$$+ [F'(x_k)]^+ (F'(x_k) A_k - P_k) - \overset{*}{P}_k A_k + \overset{*}{P}_0 A_k\| \leqslant$$
$$\leqslant C(1+\gamma_k) + L_2 r_1^{(0)} \|A_k\|,$$

откуда, так как в силу условия 5° $L_2 r_1^{(0)} < 1$,

$$\|A_k\| \leqslant C(1+\gamma_k)/(1 - L_2 r_1^{(0)})$$

и поэтому можно считать

$$\lambda_k = C(1+\gamma_k)/(1 - L_2 r_1^{(0)}). \tag{42}$$

Далее, имея в виду (44) (ср. (14)), получаем

$$\|P_{k+1} - F'(x_{k+1}) A_k\| \leqslant \|P_k - F'(x_k) A_k\| + \|P_{k+1} - P_k\| +$$
$$+ \|F'(x_k) A_k - F'(x_{k+1}) A_k\| \leqslant \gamma_k + L_2\|x_{k+1} - x_k\| + \lambda_k L\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant$$
$$\leqslant \mu\beta_{k-1} + (\lambda_k L_2 + \lambda_k^2 L)\,\|P_0 F(x_0)\|\,\delta_0^k.$$

и поэтому можно принять

$$\beta_k = \mu\beta_{k-1} + (\lambda_k L_2 + \lambda_k^2 L) \| P_0 F(x_0) \| \delta_0^k. \tag{43}$$

По (12), (13) имеем

$$P_0 F(x_{k+1}) = P_0 F(x_k) - P_k P_0 F(x_k) + P_k P_0 F(x_k) - P_0 F'(x_k) A_k F(x_k) + R.$$

Учитывая (23), (41), (44), (46), а также, что $R(x_0) \supseteq R(x)$, получаем

$$\| P_0 F(x_k) - P_k P_0 F(x_k) \| \leqslant \| P_0 - P_k \| \, \| P_0 F(x_k) \| \leqslant L_2 r_1^{(0)} \| P_0 F(x_k) \|,$$

$$\| P_k P_0 F(x_k) - P_0 F'(x_k) A_k F(x_k) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| P_k - F'(x_k) A_k \| \, \| P_0 F(x_k) \| \leqslant \gamma_k \| P_0 F(x_k) \|,$$

$$\| R \| \leqslant \| P_0 \| \, \| A_k F(x_k) \| L \int_0^1 \| t (x_{k+1} - x_k) \| \, dt \leqslant \frac{1}{2} L \lambda_k^2 \| P_0 F(x_k) \|^2$$

и окончательно имеем

$$\| P_0 F(x_{k+1}) \| \leqslant (\gamma_k + L_2 r_1^{(0)} + \frac{1}{2} L \lambda_k^2 \| P_0 F(x_k) \|) \| P_0 F(x_k) \| = \delta_k \| P_0 F(x_k) \|.$$

Теперь по индукции легко убедиться, что при $k \to \infty$

$$\beta_k \searrow 0, \qquad \delta_k \searrow L_2 r_1^{(0)},$$
$$\gamma_k \searrow 0,$$
$$\lambda_k \searrow C/(1 - L_2 r_1^{(0)}), \qquad \| P_0 F(x_k) \| \searrow 0.$$

Дальше, аналогично ([9], теорема 1) получаем

$$\| x_{k+1} - x_k \| \leqslant \lambda_k \| P_0 F(x_0) \| \delta_0^k, \tag{44}$$

$$\| x_m - x_k \| \leqslant r_1^{(0)} (\delta_0^k - \delta_0^m), \quad (m \geqslant k) \tag{45}$$

$$\| x_k - x_0 \| \leqslant r_1^{(0)} \leqslant \varrho \tag{46}$$

и, следовательно,

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x_k,$$

$$P_0 F(x^*) = 0,$$

$$\| x^* - x_k \| \leqslant r_1^{(k)} \delta_0^k.$$

Так как $R(x_0) \supseteq R(x)$, то

$$\| P_{R(x)} F(x) \| = \| P_{R(x)} P_0 F(x) \| \leqslant \| P_0 F(x) \|$$

и, используя (5) и (9), имеем

$$\| [F'(x)]^* F(x) \| = \| [F'(x)]^* P_{R(x)} F(x) \| \leqslant \| [F'(x)]^* \| \, \| P_0 F(x) \|.$$

Таким образом, решение x^* уравнения $P_0 F(x) = 0$ является и решением уравнения (2).

З а м е ч а н и е 3. Если проектор $P_{R(x)}$ не зависит от x, где $x \in S$, то $\| P_0 - P_k \| = 0$ и процесс (23), (24) сходится к решению x^* со сверхлинейной скоростью.

Например, в конечномерном случае $H_1 = E_n$ и $H_2 = E_m$, если $r = m$, то $P_{R(x)} = I_{m \times m}$, и если $r = n$, то $P_{R(x)}^* = I_{n \times n}$, где r — ранг матрицы.

З а м е ч а н и е 4. Если в (3) брать $A_k = A_0 = [F'(x_0)]^+$, то можно сформулировать аналогичную теорему о сходимости для аналога модифицированного метода Ньютона.

3. Рассмотрим следующий итерационный процесс

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k), & (47) \\ A_{k+1} = 2A_k - A_k F'(x_{k+1}) A_k \quad (k = 0, 1, \ldots). & (48) \end{cases}$$

Используя (25)—(31) и введя обозначения

$$\gamma_0 = \max\{\beta_0^2, \|P_0 - F'(x_0)A_0\|\}, \tag{49}$$

$$\lambda_{k+1} = C(1+\beta_k^2)/(1-L_2 r_1^{(0)}), \tag{50}$$

$$\beta_{k+1} = \beta_k^2 + (\lambda_{k+1}^2 L + \lambda_{k+1} L_2)\|P_0 F(x_0)\| \prod_{i=0}^{k} \delta_i, \tag{51}$$

$$\gamma_{k+1} = \beta_k^2 \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{52}$$

$$\delta_k = \gamma_k + \frac{1}{2}\lambda_k^2 L\|P_0 F(x_k)\|, \tag{53}$$

$$r_1^{(k)} = \lambda_0 \|P_0 F(x_0)\|/(1-\delta_k), \tag{54}$$

можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $x_0 \in H_1$, $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ и на S выполнены условия 1°—4° теоремы 2, а также условия*

а) $\delta_0 = \gamma_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 L\|P_0 F(x_0)\| < 1$,

б) $\beta_1 = \beta_0^2 + (\lambda_1 L_2 + \lambda_1^2 L)\|P_0 F(x_0)\| \leqslant \beta_0$,

в) $L_2 r_1^{(0)} < 1$.

Тогда, если $R(x) \supseteq R(x_0)$ для всех $x \in S$, $r_1^{(0)} = \lambda_0\|P_0 F(x_0)\|/(1-\delta_0) \leqslant \varrho$, то уравнение $[F'(x_0)]^* F(x) = 0$ имеет в S решение x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r_1^{(0)}$, к которому сходится последовательность (47)—(48), причем

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1^{(k)} \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i^{*},$$

где $\delta_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Замечание 5. Следуя с необходимыми изменениями схеме доказательства теоремы 2, нетрудно доказать и эту теорему.

Замечание 6. Если $R(x) \subset R(x_0)$, то можно доказать сходимость итерационного процесса (47)—(48) к решению уравнения $[F'(x)]^* F(x) = 0$, однако в этом случае скорость сходимости — линейна.

4. Пронумеруем итерационные процессы (методы) в следующем порядке:

1° $A_k = [F'(x_k)]^+$,

2° $A_k = [F'(x_0)]^+$,

3° $A_k = 2A_{k-1} - A_{k-1}F(x_k)A_{k-1}$,
  а) $A_0 = [F'(x_0)]^+$,
  в) $A_0 = \alpha_0[F'(x_0)]^*$,

4° $A_k = A_{k-1} + \alpha_k[F'(x_k)]^*[I_2 - F'(x_k)A_{k-1}]$,
  а) $A_0 = [F'(x_0)]^+$,
  в) $A_0 = \alpha_0[F'(x_0)]^*$,

5° $A_k = \alpha_k[F'(x_k)]^*$,

6° $A_k = 2\alpha_k[F'(x_k)]^* - \alpha_k^2[F'(x_k)]^* F'(x_k)[F'(x_k)]^*$

и применим их для решения числовых примеров, заимствованных из [4].

* Считаем, что $\prod_{i=0}^{k-1} \delta_i = 1$ при $k = 0$.

Здесь в качестве α_k выберем $\alpha_k = \frac{3}{2M_k}$, где $M_k = \max_i \sum |b_{ij}^{(k)}|$, $b_{ij}^{(k)} = F'(x_k)[F'(x_k)]^*$. Вычисления закончим, если $\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \varepsilon = 0{,}0000010$.

Пример 1. Решить систему

$$F(x) = \begin{cases} f_1 = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ f_2 = x_1 - x_2 = 0, \\ f_3 = x_1 x_2 - 1 = 0, \end{cases}$$

имеющую нулевые точки (1,1) и (—1, —1).

Приведем таблицу числа итераций n, необходимых для достижения заданной точности при различных методах и различных исходных данных.

Исходные данные	Методы							
	1°	2°	3° *а*	3° *в*	4° *а*	4° *в*	5°	6°
	n							
$\overset{0}{x}_1 = 3{,}0$, $\overset{0}{x}_2 = 2{,}0$	6	26	7	9	9	12	35	20
$\overset{0}{x}_1 = -3{,}0$, $\overset{0}{x}_2 = -2{,}0$	6	26	7	9	9	12	35	25

Пример 2. Решить систему

$$F(x) = \begin{cases} f_1 = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ f_2 = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ f_3 = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

имеющую $\min_x \sum_{i=1}^{3} f_i^2 = 42{,}666667$ в точке (1; 1,914854).

Исходные данные	Методы							
	1°	2°	3° *а*	3° *в*	4° *а*	4° *в*	5°	6°
	n							
$\overset{0}{x}_1 = 10$, $\overset{0}{x}_2 = 20$	8	95	10	14	8**	не сходится	44	27

** Итерационный процесс 4° *а* сходился к точке (1,151850; 1,907583), при которой $\sum_i f_i^2 = 42{,}85120$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **17**, 379 (1968).
2. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 14 (1969).
3. Ben-Israel A., Israel J. Math., **3**, 94 (1965).
4. Ben-Israel A., J. Math. Anal. and Appl., **15**, 243 (1966).
5. Pyle L. D., J. Assoc. Comp. Mach., **11**, 422 (1964).
6. Desoer C. A., Whalen B. H., J. Soc. Industr. Appl. Math., **11**, 442 (1963).
7. Showalter D., Proc. Amer. Math. Soc., **18**, 584 (1967).

8. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.
9. Поляк Б. Г., Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 4, 995 (1964).
10. Altman M., Pacific J. Math., 4, 1107 (1960).
11. Ben-Israel A., Wersan S. J., J. Assoc. Comp. Mach., 10, 532 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
13/X 1969

O. VAARMANN

ÜLDISTATUD PÖÖRDEOPERAATORITE JA NENDE LÄHENDOPERAATORITE KASUTAMISEST MITTELINEAARSETE VÕRRANDITE LAHENDAMISEKS

Üldistatud pöördeoperaatorite lähedasi operaatoreid kasutades konstrueeritakse võrrandi (2) lahendamiseks iteratsiooniprotsessid ja tõestatakse teoreemid seda tüüpi iteratsiooniprotsesside koonduvusest võrrandi (2) lahendiks ning selle võrrandi lahendi olemasolu. Tuuakse näiteid mittelineaarsete võrrandisüsteemide arvulise lahendamise kohta.

O. VAARMANN

ON THE APPLICATION OF GENERALIZED INVERSES AND THEIR APPROXIMATIONS TO THE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS

For solving (2), certain iterative processes using approximations of generalized inverses are constructed. Some convergence theorems concerning the iterative methods of the type (3) and the existence of a solution of equation (2) are proved. In conclusion, some numerical results are proposed.