EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.3.01

Т. ТОБИАС

О НАХОЖДЕНИИ ОБЛАСТИ ОСТАНОВКИ ДЛЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Во многих работах (см., напр., [1]) изучаются вопросы существования оптимального правила для остановки случайного процесса, но его практическое нахождение наталкивается на серьезные затруднения и обычно не рассматривается. В данной работе в одном частном случае указан метод для нахождения оптимальной стратегии.

1. Пусть $\{x_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и пусть $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. В работах [2–5] рассматривается следующая задача. Задана последовательность σ-алгебр $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq \ldots$ (где F_n порождена случайными величинами $x_1, \ldots, x_n$) и совокупность $\mathfrak{T}$ целочисленных случайных величин (так наз. правил остановки): $\tau \in \mathfrak{T}$, если $P\{\tau < \infty\} = 1$ и $\{\omega \mid \tau = n\} \in F_n$. $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n$ означает прекращение дальнейших наблюдений, при этом получается выигрыш $c_n S_n$ (или $c_n g(S_n)$, где $g(x)$ — некоторая известная функция, например, $g(x) = x^2$ или $g(x) = e^{\lambda x}$).

В указанных выше работах исследуется существование оптимального правила остановки, которое максимизирует средний выигрыш $Ec_\tau S_\tau$. Нахождение самого оптимального правила не рассматривается.

В данной работе исследуется численное решение поставленной выше задачи. При этом дискретный вариант задачи заменяется непрерывным. Вместо суммы S_n рассматривается винеровский процесс $x(t)$. Остановка в момент времени t влечет за собой выигрыш $f(x,t) = c(t)x(t)$, где $c(t)$ — непрерывная монотонно убывающая положительная функция. Набором правил остановок являются всевозможные марковские моменты τ, $P(\tau < \infty) = 1$. Пусть $x(t_0) = x_0$. Тогда $\sup_\tau Ec(\tau)x(\tau) = V(x_0, t_0)$ является максимальным возможным средним выигрышем. Оказывается, что в области продолжения наблюдений C функция $V(x,t)$ является решением уравнения в частных производных, а в области $R|C$ $V(x,t) = c(t)x$. Известны и краевые условия уравнения, но неизвестна граница $\sigma(t)$ области C, где задается краевое условие. Решение таких задач наталкивается на серьезные трудности. В ряде работ (см., напр., [6]) найдены приближенные выражения для $V(x,t)$ и для неизвестной границы при $t \to 0$ и $t \to \infty$, но эти методы часто зависят от конкретной задачи и являются трудоемкими.

При выводе последующих уравнений мы предположим существование частных производных функции $V(x,t)$ и гладкость границы $\sigma(t)$. Строгое обоснование такого подхода имеется в работе [7], но там исследуется случай, когда выигрыш $f(x,t)$ не зависит от времени, поэтому этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании.

Отметим еще работу [8], где другим путем находится явное решение поставленной задачи в случае $c(t)=e^{-\lambda t}$.

2. Пусть $x(t+h)=x(t)+ah+b\sqrt{h}\,\eta$, где $a\geqslant 0$, $b>0$, $\eta\sim N(0,1)$. Пусть C является областью продолжения наблюдений. Тогда при $(x,t)\in C$ имеем

$$V(x,t)=EV(x(t+h),t+h)=EV(x(t)+ah+b\sqrt{h}\,\eta,t+h).$$

При допущении существования соответствующих производных имеем

$$V(x,t)=V(x,t)+\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}E(ah+b\sqrt{h}\,\eta)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}E(ah+b\sqrt{h}\,\eta)^2+\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}h+o(h).$$

При $h\to 0$ получим искомое уравнение для $V(x,t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+a\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0.$$

Допустим, что с вероятностью, равной единице, $\lim\limits_{t\to\infty}c(t)x(t)=0$. В случае $a=0$ для этого, например, достаточно, чтобы $c(t)<Mt^{-(1/2+\varepsilon)}$ при некотором $\varepsilon>0$. Тогда можно ограничиваться лишь теми решениями $V(x,t)$, при которых $\lim\limits_{t\to\infty}V(x,t)=0$. Другим естественным условием, налагаемым на $V(x,t)$, является требование, чтобы $\lim\limits_{x\to-\infty}V(x,t)=0$. На неизвестной границе $\sigma(t)$ $V[\sigma(t),t]=c(t)\sigma(t)$.

Пусть задана непрерывная граница $x=\sigma(t)\geqslant 0$. Найдем решение $V(x,t)$ следующей граничной задачи:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+a\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0; \tag{1}$$

$$V[\sigma(t),t]=c(t)\sigma(t); \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\infty}V(x,t)=0; \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}V(x,t)=0. \tag{4}$$

Лемма. *Допустим, что выполняется условие*

$$\lim_{t\to\infty}\sigma(t)c(t)=0. \tag{*}$$

Тогда задача (1)—(4) *не может иметь в области* $C=\{t,x\colon x<\sigma(t)\}$ *более одного решения.*

Доказательство. Условия (3) и (*) гарантируют, что $\lim\limits_{t\to\infty}V(x,t)=0$ в области $\overline{C}$. Пусть $V_1(x,t)$ и $V_2(x,t)$ являются решениями задачи. Тогда $V_3(x,t)=V_1(x,t)-V_2(x,t)$ является в области C решением уравнения (1). Пусть $\max\limits_{-\infty<x\leqslant\sigma(t)}V_3(x,t)=h(t)=V_3(x_0,t)>0$ и пусть $x_0<\sigma(t)$. Тогда $\dfrac{\partial V(x_0,t)}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial^2 V(x_0,t)}{\partial x^2}\leqslant 0$ и из уравнения (1) видно, что $\dfrac{\partial V(x_0,t)}{\partial t}\geqslant 0$. Поэтому $h(t)$ является возрастающей функцией, что верно и тогда, когда $x_0 = \sigma(t)$, т. е. $h(t) = 0$. Но это противоречит условию $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 0$, поэтому $V_3(x, t) \leqslant 0$. Аналогично доказывается обратное неравенство.

Зафиксируем границу $\bar\sigma(t)$, удовлетворяющую условию (*). Допустим, что с вероятностью, равной единице, процесс $x(t)$ достигает впервые границы $\bar\sigma(t)$ за конечный промежуток времени $\bar\tau$. Тогда выигрыш $\bar V(x, t)$, соответствующий остановке процесса в момент $\bar\tau$, удовлетворяет условиям (1)—(4) и является поэтому единственным решением краевой задачи (1)—(4). Но соответствующая стратегия $\bar\tau$ (граница $\bar\sigma(t)$) не является еще оптимальной. Нужно найти такую границу $\sigma(t)$, чтобы при соответствующей стратегии τ выигрыш $V(x, t)$ был бы максимальным, т. е. если в области $C = \{t, x\colon\ x < \sigma(t)\}$ $V(x, t)$ является решением задачи (1)—(4), а в области $R|C$ $V(x, t) = c(t)x$, то $V(x, t) \geqslant \bar V(x, t)$ при любой конкурирующей границе $\bar\sigma(t)$. Выведем условие (так наз. «гладкого склеивания»), которому удовлетворяет оптимальная граница $\sigma(t)$:

$$\left.\frac{\partial V(x, t)}{\partial x}\right|_{x=\sigma(t)-0} = c(t). \tag{5}$$

Так как при $(x, t) \in C$ $V(x, t) > c(t)x$, то на границе $\partial V/\partial x \leqslant c(t)$. Допустим, что $\partial V/\partial x < c(t)$. Рассмотрим новую стратегию, по которой после первого достижения границы $\sigma(t)$ наблюдения продолжаются в течение короткого промежутка времени δt, а затем продолжаются по оптимальной стратегии. Соответствующий выигрыш

$$V_{\delta t}(x, t) = EV[x(t + \delta t), t + \delta t].$$

Допустим, что $\sigma(t + \delta t) = \sigma(t) + o(\sqrt{\delta t})$. Тогда

$$x(t + \delta t) = \sigma(t + \delta t) + b\sqrt{\delta t}\,\eta + o(\sqrt{\delta t}) \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} EV[x(t + \delta t), t + \delta t] &= V(x, t) + bc(t)\sqrt{\delta t}\,E(\eta \mid \eta > 0) + \\ &+ \partial V/\partial x|_{x=\sigma(t)-0}\, b\sqrt{\delta t}\,E(\eta \mid \eta \leqslant 0) + o(\sqrt{\delta t}) = \\ &= V(x, t) + b\sqrt{\delta t}[c(t) - \partial V/\partial x|_{x=\sigma(t)-0}](2\pi)^{-1/2} + o(\sqrt{\delta t}). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при малых δt $V_{\delta t}(x, t) > V(x, t)$, что противоречит оптимальности $V(x, t)$.

3. В некоторых случаях удается найти точное решение задачи (1)—(5). Пусть, например, $c(t) = \beta^t$, где $0 < \beta < 1$. Тогда легко найти, что $V(x, t) = {}^1\!/_p e^{px-1}\beta^t$ и $\sigma(t) = {}^1\!/_p$, где $p = b^{-2}(-a + \sqrt{a^2 - 2b^2 \ln \beta})$. Это единственный вид функции $c(t)$, когда решение является функцией вида $V(x, t) = f_1(x) f_2(t)$. Действительно, из уравнения (1) получим, что в таком случае $V(x, t) = l e^{px} e^{-k^2 t}$. Условия (2) и (5) дают $\sigma(t) = {}^1\!/_p$, но тогда из (5) видно, что $c(t) = \alpha e^{-k^2 t}$.

В частном случае $\beta = e^{-\lambda}$ получим следующий результат: $\sup\limits_{\tau} Ee^{-\lambda\tau}x(\tau)$ достигается при остановке в момент первого достижения процессом $x(t)$ уровня $\sigma(t) = {}^1\!/_p$, где $p = b^2(-a + \sqrt{a^2 + 2b^2\lambda})$. Если в момент времени t $x = x(t)$, то максимальный средний выигрыш $V(x, t) = {}^1\!/_p e^{px-1} e^{-\lambda t}$.

При помощи полученного результата можно получить нижние оценки для $\sigma(t)$ и при других функциях $c(t)$. Пусть, например, $c(t) = (t + 1)^{-1}$.

Возьмем $\lambda = t_0^{-1}\ln(t_0+1)$. Если $t > t_0$, то $\exp\{-tt_0^{-1}\ln(t_0+1)\} < c(t)$. Поэтому, если (x, t_0) принадлежит области продолжения наблюдений при $c(t) = \exp\{-tt_0^{-1}\ln(t_0+1)\}$, то тем более нужно продолжать наблюдения при $c(t) = (t+1)^{-1}$, поэтому в данном случае $\sigma(t) \geqslant$ $\geqslant b^2(-a + \sqrt{a^2 + 2b^2 t^{-1}\ln(t+1)})^{-1}$.

4. Рассмотрим один метод для нахождения оптимальной границы $\sigma(t)$.

Лемма (ср. с леммой 1 [3]). *Если* $\dfrac{c(t+t_1+t_2)}{c(t+t_2)} \geqslant \dfrac{c(t+t_1)}{c(t)}$ *при произвольных неотрицательных* t, t_1 *и* t_2, *то оптимальная граница* $\sigma(t)$ *является монотонно возрастающей функцией.*

Доказательство. Надо доказать, что если $(x, t) \in C$, то $(x, t+\tau) \in C$ при любой $\tau > 0$. Действительно, пусть $x(t+\tau) = x(t)$ и пусть существует такой марковский момент ζ, что $Ec(t+\zeta)x(t+\zeta) \geqslant$ $\geqslant c(t)x(t)$. Но тогда $Ec(t+\tau+\zeta)x(t+\tau+\zeta) = Ec(t+\tau+\zeta)x(t+\zeta) =$ $= E\dfrac{c(t+\tau+\zeta)}{c(t+\zeta)}c(t+\zeta)x(t+\zeta) \geqslant \dfrac{c(t+\tau)}{c(t)}Ec(t+\zeta)x(t+\zeta) \geqslant \dfrac{c(t+\tau)}{c(t)} \times$ $\times c(t)x(t) = c(t+\tau)x(t+\tau)$.

Для проверки выполнения условия леммы покажем, что требование $\dfrac{c(t+\tau+\zeta)}{c(t+\zeta)} \geqslant \dfrac{c(t+\tau)}{c(t)}$ эквивалентно требованию, чтобы функция $g(t) = \dfrac{d}{dt}\ln c(t)$ являлась монотонно возрастающей функцией.

Утверждение вытекает из следующей цепочки заключений:

$$g(t) \leqslant g(t+\zeta) \Rightarrow \frac{c'(t)}{c(t)} \leqslant \frac{c'(t+\zeta)}{c(t+\zeta)} \Rightarrow c'(t)c(t+\zeta) - c(t)c'(t+\zeta) \leqslant 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{c(t)}{c(t+\zeta)} \text{ — убывающая функция}\right) \Rightarrow \frac{c(t)}{c(t+\zeta)} \geqslant \frac{c(t+\tau)}{c(t+\zeta+\tau)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{c(t+\tau+\zeta)}{c(t+\zeta)} \geqslant \frac{c(t+\tau)}{c(t)} \text{ и наоборот.}$$

В дальнейшем предположим, что выполнено условие леммы и что $a = 0$ (в случае $a > 0$ нужно делать замену переменных $x = y + at$ и дополнительно предположить, что $\lim\limits_{t\to\infty} tc(t) = 0$). Рассмотрим следующие субоптимальные стратегии. Пусть $(x, t) \in C$ и пусть $x \leqslant \alpha$. Стратегия τ_α предусматривает остановку при первом достижении процессом $x(t)$ уровня α. Очевидно, что как при оптимальном τ, так и при τ_α соответствующие $V(x, t)$ и $V^\alpha(x, t)$ являются монотонно убывающими по t функциями. Но из уравнения (1) видно, что тогда каждое решение (1) — (4) является в области $x \leqslant \alpha$ выпуклой по x функцией $\left(\dfrac{\partial V^\alpha}{\partial t} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 V^\alpha}{\partial x^2} \leqslant 0\right)$.

Теперь легко видеть, что при зафиксированном t $V^\alpha(x, t)$ может иметь с прямой $k_t(x) = c(t)x$ по крайней мере две точки пересечения. Пусть $\alpha_1 > \sigma(t)$. Так как $V^{\alpha_1}[\sigma(t), t] \leqslant V[\sigma(t), t]$, а $\lim\limits_{x\to-\infty} V^{\alpha_1}(x, t) = 0$, то $V^{\alpha_1}(x, t)$ пересекает прямую $k_t(x)$ в точке $\alpha_2 < \sigma(t)$. При этом $\dfrac{\partial V^{\alpha_1}(\alpha_1, t)}{\partial x} > c(t)$ и $\dfrac{\partial V^{\alpha_1}(\alpha_2, t)}{\partial x} < c(t)$. Легко доказать, что $\dfrac{\partial}{\partial x}V^\alpha(x, t)$ зависит непрерывно от α, поэтому найдется такое значение α^*, что $\alpha_2 <$ $< \alpha^* < \alpha_1$ и $\dfrac{\partial V^{\alpha^*}(\alpha^*, t)}{\partial x} = c(t)$, т. е. в точке α^* функция $V^{\alpha^*}(x, t)$ касается прямой $k_1(x)$. При этом $\alpha^* \leqslant \sigma(t)$. Допустим, что $\alpha^* < \sigma(t)$ и покажем, что это приводит к противоречию.

Действительно, пусть $\alpha^* < \sigma(t)$. Тогда найдется такое значение x, что $\alpha^* < x < \sigma(t)$, и при любых $\alpha > x$ соответствующий выигрыш $V^\alpha(x,t) < c(t)x$. Другими словами, выигрыш при остановке в точке (x,t) больше, чем выигрыш при продолжении наблюдений до момента достижения процессом любого уровня $\alpha > x$. Но (оптимальное) продолжение наблюдений до момента достижения границы $\sigma(t)$ порождает на границе меру $P(t,x;\ \tau,\ \sigma(\tau))$. Эта мера очевидным образом индуцирует соответствующую меру $P(x,t;\ d\alpha)$ на множестве $\{\alpha\colon \sigma(t) \leqslant \alpha < \infty\}$. Ввиду монотонности границы $\sigma(t)$ $V(x,t) = \int V^\alpha(x,t)P(x,t;d\alpha) < c(t)x$, что противоречит допущению $(x,t) \in C$.

Итак, оптимальную границу $\sigma(t)$ можно найти следующим путем. Фиксируем t и находим $V^\alpha(x,t)$. А затем из уравнения $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\partial V^\alpha(x,t)}{\partial x} = c(t)$ находим $\alpha = \alpha(t) = \sigma(t)$.

Рассмотрим в заключение несколько примеров.

Известно, что плотность вероятности первого достижения уровня α винеровским процессом со средним at и дисперсией b^2t равна $g_\alpha(t) = |\alpha|(2\pi b^2)^{-1/2}t^{-3/2}\exp\left\{-\frac{(\alpha-at)^2}{2b^2t}\right\}$.

Поэтому (при $\alpha > x$)

$$V^\alpha(x,t) = \frac{(\alpha-x)\alpha}{\sqrt{2\pi}\,b}\int\limits_t^\infty c(\tau)(\tau-t)^{-3/2}\exp\left\{\frac{-[(\alpha-x)-a(\tau-t)]^2}{2(\tau-t)b^2}\right\}d\tau.$$

Пусть $c(t) = e^{-\lambda t}$. Тогда

$$V^\alpha(x,t) = \alpha\exp\left\{-\lambda t + \frac{(\alpha-x)a}{b} - \frac{(\alpha-x)}{\sqrt{b}}\sqrt{2\lambda + a^2/b}\right\}.$$

Теперь из уравнения $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\partial}{\partial x}V^\alpha(x,t) = e^{-\lambda t}$ получим найденную ранее границу $\alpha = \sigma(t) = b^2(-a + \sqrt{a^2 + 2b^2\lambda})^{-1}$.

Пусть $c(t) = (t+1)^{-1}$ и $a = 0$. Тогда

$$V^\alpha(x,t) = \frac{(\alpha-x)\alpha}{\sqrt{2\pi}\,b}\int\limits_t^\infty (\tau+1)^{-1}(\tau-t)^{-3/2}\exp\left[-\frac{(\alpha-x)^2}{2(\tau-t)b^2}\right]d\tau =$$

$$= \frac{(\alpha-x)\alpha}{\sqrt{2\pi}\,b}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{v}}{1+v(t+1)}\exp\left[-\frac{(\alpha-x)^2}{2b^2}v\right]dv =$$

$$= (t+1)^{-1}\alpha\left[1 - \sqrt{\pi}\,ze^{z^2} + 2ze^{z^2}\int\limits_0^z e^{-u^2}du\right],$$

где $z = \frac{\alpha-x}{b\sqrt{2(t+1)}}$. В данном случае $\alpha = \sigma(t) = b\sqrt{\frac{2}{\pi}(t+1)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chow Y. S., Robbins H., Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 2, Nr. 1, 33 (1963).
2. Chow Y. S., Robbins H., Illinois J. Math., 9, 444 (1965).
3. Teicher M., Wolfowitz J., Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 5, 361 (1966).

4. Dvoretzky A., Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob., 1, 441 (1967).
5. Дынкин Е. Б., ДАН СССР, 2, 238 (1963).
6. Bather J., Chernoff M., Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob., 3, 181 (1967).
7. Григелионис Б. И., Ширяев А. Н., Теория вер., XI, № 4, 612 (1966).
8. Taylor H., Ann. Math. Statistics, 39, No. 4, 1333 (1968).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/XI 1969

T. TOBIAS

PEATUSPIIRKONNA LEIDMISEST WIENERI PROTSESSI KORRAL

Vaadeldakse Wieneri protsessi $x(t)$ optimaalset peatamist riskifunktsiooni $c(t)x(t)$ korral. Keskmise võidu jaoks leitakse võrrand, mille rajatingimused on antud tundmatul rajal. Esitatakse meetod selle raja leidmiseks.

T. TOBIAS

FINDING OF STOPPING REGIONS FOR THE WIENER PROCESS

An optimal stopping of the Wiener process $x(t)$ is considered for risk function $c(t)x(t)$. This problem is reduced to the solution of free boundary problem. A method is given for finding that boundary.