EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.3.02

Ю. ЯАКСОО

О РЕКУРРЕНТНОЙ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ БЕЗЫНЕРЦИОННОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим объект управления, который описывается следующим линейным уравнением:

$$x_n = \theta^T \mathbf{v}_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где x_n — состояние объекта на n-м такте управления; $\mathbf{v}_n^T = (v_n^1, \ldots, v_n^p)$ — вектор управляющих воздействий на n-м такте управления; $\theta^T = (\theta^1, \ldots, \theta^p)$ — вектор неизвестных параметров.

Управляющие воздействия и состояние объекта смешаны с помехой. Измеряемым вектором управляющих воздействий является $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n + \eta_n$, а измеряемым состоянием — $z_n = x_n + \xi_n$. Случайные векторы η_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ и случайные величины ξ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ распределены нормально и независимо с функциями плотности вероятности (ф. п. в.):

$$p(\eta) = \frac{|\mathbf{Q}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\eta^T \mathbf{Q}^{-1}\eta\right] \tag{2}$$

и

$$p(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3}$$

соответственно.

Так как случайная величина

$$z_n - \theta^T \mathbf{u}_n = (z_n - x_n) + \theta^T(\mathbf{v}_n - \mathbf{u}_n)$$

распределена нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\omega^{-1} = \sigma^2 + \theta^T \mathbf{Q}\theta$, то функцию правдоподобия можно записать в виде

$$p(\mathbf{Z}_n/\mathbf{U}_n, \theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\omega)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \theta^T \mathbf{u}_i)^2\right] =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\omega)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\omega}{2}(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)^T(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)\right], \tag{4}$$

где $\mathbf{U}_n^T = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ — $(p \times n)$ — матрица измеренных управляющих воздействий; $\mathbf{Z}_n^T = (z_1, \ldots, z_n)$ — $(1 \times n)$ — матрица измеренных состояний.

Пусть на пространстве параметров определена априорная ф. п. в.

$$p_0(\theta) = \frac{|\mathbf{C}_0|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^T \mathbf{C}_0 (\theta-\theta_0)\right]. \tag{5}$$

В соответствии с формулой Байеса апостериорная ф. п. в. выражается в виде

$$p(\theta \mid \mathbf{Z}_n, \mathbf{U}_n) = \frac{p(\mathbf{Z}_n \mid \mathbf{U}_n, \theta)\, p_0(\theta)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{Z}_n \mid \mathbf{U}_n, \theta)\, p_0(\theta)\, d\theta}. \tag{6}$$

В силу того, что дисперсия ω^{-1} зависит от θ, то получение апостериорной оценки вектора неизвестных параметров θ на каждом такте управления $n = 1, 2, \ldots$ связано с большим объемом вычислений. Если функция правдоподобия мало чувствительна к изменению ω, то истинный вектор θ в выражении ω в n-й момент времени можно, очевидно, заменить его предыдущей оценкой θ_{n-1} и вычисление апостериорной ф. п. в. значительно упрощается.

Для исследования чувствительности функции правдоподобия применяем предложенную в [1] идею. Рассмотрим логарифм функции правдоподобия (4)

$$\ln p(\mathbf{Z}_n \mid \mathbf{U}_n, \theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{n}{2}\ln\omega - \frac{1}{2}\omega(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)^T(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta) \tag{7}$$

как сложную функцию ω и θ, т. е.

$$\ln p = \ln p[\omega(\theta), \theta].$$

Тогда производная логарифма функции правдоподобия примет вид

$$\frac{d}{d\theta}\ln p = \frac{\partial \ln p}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p}{\partial \theta}. \tag{8}$$

Обозначив

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \ln p}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \ln p}{\partial \theta}$$

и вычислив частные производные, получим следующие выражения для квадратов норм векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \omega^2[\omega(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)^T(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta) - n]^2 \theta^T \mathbf{Q}^2 \theta, \tag{9}$$

$$\|\mathbf{b}\|^2 = \omega^2(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)^T \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T (\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta). \tag{10}$$

Найдем условия, при которых $\mathcal{E}\|a\|^2 \ll \mathcal{E}\|b\|^2$, где $\mathcal{E}$ обозначает оператор математического ожидания. Для этого, во-первых, вычисляем математические ожидания по случайному вектору $\mathbf{Z}_n$. Учитывая, что

$$\mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \theta^T \mathbf{u}_i)^2\right] = \omega^{-1}$$

и

$$\mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \theta^T \mathbf{u}_i)^2\right]^2 = \frac{n+2}{n}\omega^{-2},$$

получим

$$\mathcal{E}\|\mathbf{a}\|^2 = 2\omega^2 n \theta^T \mathbf{Q}^2 \theta. \tag{11}$$

Математическое ожидание квадратичной формы [2]

$$\mathcal{E}[(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)^T \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T (\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)] = \operatorname{tr}[(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T) \operatorname{cov} \mathbf{Z}_n], \tag{12}$$

где tr обозначает след матрицы.

Так как $\operatorname{cov} \mathbf{Z}_n = \omega^{-1}\mathbf{I}_n$, где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица порядка n, то

$$\mathcal{E}[(\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)^T \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T (\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)] = \omega^{-1} \operatorname{tr}(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T). \tag{13}$$

Учитывая (10) и (13), получим

$$\mathcal{E}\,\|\mathbf{b}\|^2 = \omega \operatorname{tr}(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T). \tag{14}$$

Принимая во внимание, что $\omega^{-1} = \sigma^2 + \theta^T Q\theta$, получим следующее неравенство:

$$2n\theta^T \mathbf{Q}^2 \theta \ll (\sigma^2 + \theta^T \mathbf{Q}\theta) \operatorname{tr}(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T). \tag{15}$$

Так как

$$\operatorname{tr}(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i,$$

то квадрат средней нормы вектора управляющих воздействий

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T). \tag{16}$$

С учетом (16) перепишем неравенство (15) в виде

$$-\sigma^2 \|\mathbf{u}\|^2 \ll \theta^T [\|\mathbf{u}\|^2 \mathbf{Q} - 2\mathbf{Q}^2] \theta.$$

Последнее неравенство выполнено, если выполнено неравенство

$$\|\mathbf{u}\|^2 \lambda_{\max} - 2\lambda_{\max} \gg 0,$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное число матрицы $\mathbf{Q}$. Так как $\lambda_{\max} > 0$, получим условие

$$\|\mathbf{u}\|^2 \gg 2\lambda_{\max}, \tag{17}$$

откуда следует, что функция правдоподобия мало чувствительна к изменению величины ω тогда, когда квадрат средней нормы управляющих воздействий намного больше максимального собственного числа ковариационной матрицы помех, с которыми смешаны управляющие воздействия.

Образуем матрицу весов:

$$\Omega_n = \operatorname{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n), \tag{18}$$

где $\omega_i^{-1} = (\sigma^2 + \theta_{i-1}^T \mathbf{Q} \theta_{i-1})$ и θ_{i-1} является оценкой вектора неизвестных параметров θ, определенной на основе результатов измерений до момента времени i. Если предположить, что на каждом такте $n = 1, 2, \ldots$ выполнено условие (17), то функцию правдоподобия можно будет приближенно представить в виде

$$p(\mathbf{Z}_n \mid \mathbf{U}_n, \theta) \cong \frac{|\Omega_n|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)^T \Omega_n (\mathbf{Z}_n - \mathbf{U}_n\theta)\right]. \tag{19}$$

С учетом априорной ф. п. в. (5) и функции правдоподобия (19) приближенная апостериорная ф. п. в. вектора неизвестных параметров

$$p(\theta \mid \theta_n, C_n) = \frac{|C_n|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\theta - \theta_n)^T C_n (\theta - \theta_n)\right], \tag{20}$$

где

$$C_n = C_0 + U_n^T \Omega_n U_n, \tag{21}$$

$$\theta_n = C_n^{-1}[C_0\theta_0 + U_n^T \Omega_n Z_n]. \tag{22}$$

Выведем рекуррентные соотношения для определения параметров апостериорной ф. п. в. (20).

Так как

$$U_n^T \Omega_n U_n = (U_{n-1}^T \mid u_n) \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \omega_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} U_{n-1} \\ \hline u_n^T \end{array}\right) =$$

$$= U_{n-1}^T \Omega_{n-1} U_{n-1} + \omega_n u_n u_n^T,$$

$$U_n^T \Omega_n Z_n = (U_{n-1}^T \mid U_n) \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \omega_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} Z_{n-1} \\ \hline z_n \end{array}\right) =$$

$$= U_{n-1}\Omega_{n-1}Z_{n-1} + \omega_n z_n u_n$$

и [3]

$$[C_{n-1} + \omega_n u_n u_n^T]^{-1} = C_{n-1}^{-1} - \omega_n \frac{C_{n-1}^{-1} u_n u_n^T C_{n-1}^{-1}}{1 + \omega_n u_n^T C_{n-1}^{-1} u_n},$$

то вместо (21) и (22) можно записать

$$C_n = C_{n-1} + \omega_n u_n u_n^T, \tag{23}$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \omega_n \frac{C_{n-1}^{-1} u_n}{1 + \omega_n u_n^T C_{n-1}^{-1} u_n} (z_n - \theta_{n-1}^T u_n). \tag{24}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Clutton-Brook M., Technometrics, 9, No. 2 (1967).
2. Plackett R. L., Principles of Regression Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1960.
3. Bodewig E., Matrix Calculus, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
2/XII 1968

Ü. JAAKSOO

LINEAARSE INERTSIVABA JUHTIMISOBJEKTI PARAMEETRITE REKURSIIVSEST HINDAMISEST

Artiklis vaadeldakse parameetrite vektori hindamise probleemi juhul, kui juhttoimete vektor ja objekti olek on mõõdetud additiivse normaalse müraga. Esitatakse rekursiivsed seosed tundmatute parameetrite vektori matemaatilise oote ja kovariatsioonmaatriksi arvutamiseks.

Ü. JAAKSOO

ON THE RECURSIVE ESTIMATION OF THE PARAMETERS OF THE LINEAR MEMORYLESS CONTROL PLANT

In the present paper, the plant parameters vector estimation problem is considered in case the control vector and the state of the plant are measured with additive gaussian noise. The recursive relationships for the determination of the expectation vector and co-variance matrix of the unknown parameters vector are derived.