EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.3.01

У. КАЛЬЮЛАЙД

О КОГОМОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ НЕКОТОРЫХ КВАЗИПРОЕКТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В работе доказывается, что когомологическая размерность дополнения к любому конечному набору точек в r-мерном проективном многообразии Коэна—Маколея равна $r-1$.

Задача о вычислении когомологий квазипроективных многообразий с коэффициентами в когерентных пучках приводит, в частности, к интересному вопросу о когомологической размерности таких многообразий. Эта характеристика многообразия интересует нас, в первую очередь, в связи с результатом Нагаты [1] о том, что всякое алгебраическое многообразие может быть вложено в полное алгебраическое многообразие. Как показывают простые примеры, это вложение $V \to V^*$ далеко не всегда удовлетворяет требованию минимальности числа $\dim_{V^*}(V^* \setminus V)$. Интересной представляется задача выяснения всех тех случаев, когда это число описывается в терминах одной когомологической размерности дополнения $V^* \setminus V$. В данной работе один такой случай описывается теоремой 2.

§ 0 содержит краткое изложение некоторых известных, но малодоступных результатов теории локальных когомологий А. Гротендика в нужной для нас форме. В § 1 найдены некоторые простые общие свойства когомологической размерности. В § 2 доказано, что когомологическая размерность дополнения к любому конечному набору точек в n-мерном проективном пространстве равна $n-1$, а § 3 посвящен некоторым вспомогательным вычислениям.

§ 0. Локальные когомологии Гротендика

1. Приведем несколько основных определений.

Пространство X имеет когомологическую размерность n, если для любого абелева пучка F при $i > n$ группы $H^i(X, F)$ — нулевые, но существует пучок F' такой, что $H^n(X, F') \neq 0$. Согласно Гротендику ([2], теор. 4.15.2), пространство Зарисского комбинаторной размерности $\leqslant n$ имеет когомологическую размерность $\leqslant n$. С другой стороны, существуют пространства Зарисского с бесконечной комбинаторной размерностью, но имеющие нулевую когомологическую размерность [2].

Для алгебраических многообразий X изменим определение когомологической размерности, рассмотрев вместо категории абелевых пучков на X категорию когерентных пучков. Тогда аффинные многообразия дадут нам пример пространств Зарисского со сколь угодно большой комбинаторной размерностью, имеющих при этом нулевую когомологическую размерность.

2. Если $Z \subset X$ локально замкнуто, то, по определению, Z можно включить в открытое $V \subset X$ такое, что Z замкнуто в V. В группе $F(V)$ сечений пучка F над V выделим подгруппу $\Gamma_Z(X, F)$ всех тех сечений из $F(V)$, носитель которых содержится в Z. Группа $\Gamma_Z(X, F)$ инвариантна относительно выбора V, и функтор

$$F \Rightarrow \Gamma_Z(X, F)$$

переводит точную последовательность пучков $0 \to F \to G \to H$ в точную последовательность абелевых групп

$$0 \to \Gamma_Z(F) \to \Gamma_Z(G) \to \Gamma_Z(H).$$

Это означает, что функтор $F \Rightarrow \Gamma_Z(X, F)$ является точным слева функтором из категории абелевых пучков на X в категорию абелевых групп. Правые производные функторы $H^i_Z(X, F)$ этого функтора называются группами когомологий X с коэффициентами в F и носителями в Z.

Если $U \subset X$ открыто, то естественный гомоморфизм ограничения

$$F(V) \to F(V \cap U)$$

индуцирует гомоморфизм

$$\Gamma_Z(X, F) \to \Gamma_{Z \cap U}(U, F|U).$$

Поэтому имеем предпучок

$$U \Rightarrow \Gamma_{Z \cap U}(U, F|U),$$

который на самом деле оказывается пучком. Функтор

$$F \Rightarrow \underline{\Gamma_Z}(F)$$

будет точным слева функтором из категории всех абелевых пучков на X в нее же; определены правые производные $\underline{H^i_Z}(X, F)$ этого функтора, которые называются пучками локальных когомологий для X.

Пусть X — r-мерное пространство Зарисского, F — абелев пучок на нем и $Z \subset X$ локально замкнуто. Теорема Гротендика ([3], предл. 1.12) утверждает, что при $i > r$ группы $H^i_Z(X, F)$ и пучки $\underline{H^i_Z}(X, F)$ нулевые.

3. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, Y — ее подсхема, которая задается идеалом $I \subset A$; пучок коэффициентов F ассоциирован с A-модулем N. Тогда при всех $i > 0$ имеют место изоморфизмы

$$H^i_Y(X, F) \approx \varinjlim_n Ext^i_A(A/I^n, N)$$

([3], теор. 2.8).

Для любой замкнутой $Y \subset X$ и когерентного пучка F на X имеем точную последовательность

$$0 \to \Gamma_Y(X, F) \to \Gamma(X, F) \to \Gamma(X \setminus Y, F) \to H^1_Y(X, F) \to \ldots$$
$$\to H^i_Y(X, F) \to H^i(X, F) \to H^i(X \setminus Y, F) \to H^{i+1}_Y(X, F) \to \ldots.$$

Так как в данном частном случае $H^i(X, F)=0$ при всех $i>0$, то имеем изоморфизмы

$$H^i(X\setminus Y, F)\approx H^{i+1}_Y(X, F).$$

Пусть теперь X — r-мерное проективное пространство и $S=k[t_0, \ldots, t_r]$ — алгебра многочленов над полем k. Берем в качестве F пучок $O(n)$. Тогда по Серру [4] имеем, что для $0<i<r$ группы $H^i(X, O(n))$ — нулевые, а группа $H^r(X, O(n))$ является векторным пространством над полем k размерности $\binom{-n-1}{r}$ и имеет базу из кососимметрических коциклов покрытия $\mathfrak{U}=(t_i\neq 0)$ вида $f_{01\ldots r}=\frac{1}{t_0^{\alpha_0}\ldots t_r^{\alpha_r}}$, где $\alpha_i>0$ и $\Sigma\alpha_i=-n$. Поэтому для $0<i<r-1$ имеем изоморфизмы

$$H^i(X\setminus Y, O(n))\approx H^i_Y(X, O(n)),$$

а для определения группы $H^r(X\setminus Y, O(n))$ — точную последовательность

$$H^r_Y(X, O(n))\to H^r(X, O(n))\to H^r(X\setminus Y, O(n))\to 0.$$

4. Пусть M и N — градуированные S-модули. Тогда производные Ext для функтора $\mathrm{Hom}_S(M, N)=\bigoplus_n \mathrm{Hom}^n_S(M, N)$, определенные, с одной стороны, Серром в работе [4], с другой — Картаном и Эйленбергом в [5], могут не совпадать. Однако легко видеть, что они совпадают в нужном нам частном случае $\mathrm{Ext}^i_A(A/I^n, A)$, где $A=k[t_1, \ldots, t_r]$ и I — идеал в A, задающий $Y\subset X$. Действительно, кольцо A/I^n, как модуль над самим собой, является также A-модулем. Как кольцо A/I^n — нётерово. Подмодулями в A/I^n будут его идеалы; поэтому из теоремы Гильберта ([5], с. 32) следует нётеровость этого модуля. Но нётеров модуль над нётеровым кольцом имеет конечный тип. В этом случае ([4], с. 434) оба определения Ext совпадают.

Пусть даны R-модули A, B, A', B' и R-гомоморфизмы $\alpha: A'\to A$ и $\beta: B\to B'$. Вводим R-гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta): \mathrm{Hom}(A, B)\to\mathrm{Hom}(A', B')$, который для каждого $\varphi\in\mathrm{Hom}(A, B)$ определяется формулой

$$\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)\circ\varphi=\beta\circ\varphi\circ\alpha.$$

Объекты $\mathrm{Hom}(A, \beta)$ и $\mathrm{Hom}(\alpha, B)$ получаются из $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)$ соответственно при $A=A'$ и $B=B'$. Следующая теорема из гомологической алгебры может быть полезна при вычислении локальных групп когомологий.

Рассмотрим точные последовательности модулей

$$0\to I^n\xrightarrow{\alpha} A\to A/I^n\to 0$$

и

$$0\to A\to K\xrightarrow{\beta} K/A\to 0,$$

где A — проективный и K — инъективный модули. Имеют место следующие изоморфизмы (см. [5], с. 141):

$$\mathrm{Ext}^i_A(A/I^n, A)\approx\mathrm{Ext}^{i-2}_A(I^n, K/A),$$

$$\mathrm{Ext}^2_A(A/I^n, A) \approx \mathrm{Coker}\,(\mathrm{Hom}_A(\alpha, \beta)),$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(A/I^n, A) \approx \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(\alpha, \beta))/[\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\alpha, K/A)) + \\ + \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(A, \beta))].$$

Так как по первой основной теореме Гротендика имеются изоморфизмы

$$H^i_Y(X, O) \approx \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(A/I^n, A),$$

то приведенные выше три изоморфизма достаточны для вычислений в 3-мерном пространстве.

§ 1. Некоторые общие свойства когомологической размерности

1. Пусть X и Y — алгебраические многообразия; $\varphi: Y \to X$ — некоторый морфизм и F — алгебраический пучок на X. Тогда определен алгебраический пучок F^φ на Y, называемый обратным образом пучка F при изоморфизме* φ.

Если F — когерентный пучок на X, то F^φ будет тоже когерентным на Y. Действительно, в силу когерентности пучка F существует $U \subset X$, в котором имеем точную последовательность

$$O^p \to O^q \to F \to 0.$$

Гомоморфизм $O_x \to O_y$ индуцирует тождественное отображение на основном поле k; поэтому имеем канонический изоморфизм

$$O_y \oplus_{O_x} O_x \approx O_y.$$

Это дает нам $O^n_y \approx (O^n_x)^\varphi$, $n = 1, 2, \ldots$ и поэтому в $\varphi^{-1}(U)$ для F^φ имеем точную последовательность $O^p \to O^q \to F^\varphi \to 0$, что доказывает когерентность пучка F^φ.

2. Теорема 1. *Для любых алгебраических многообразий X и Y имеет место неравенство*

$$\mathrm{dimh}\, X \times Y \geqslant \mathrm{dimh}\, X + \mathrm{dimh}\, Y. \tag{1}$$

Если $\dim X = \mathrm{dimh}\, X$, $\dim Y = \mathrm{dimh}\, Y$, *то обе части неравенства* (1) *совпадают.*

Доказательство. Пусть $p_1: X \times Y \to X$ и $p_2: X \times Y \to Y$ — естественные проекции. Далее, пусть $\mathrm{dimh}\, X = r$, $\mathrm{dimh}\, Y = s$. Тогда существуют такие когерентные пучки F и G на X и Y соответственно, что k-векторные пространства $H^r(X, F)$ и $H^s(Y, G)$ — ненулевые; поэтому

$$H^r(X, F) \otimes_k H^s(Y, G) \neq 0.$$

Используем формулу Кюннета для пучков [7]:

$$H^n(X \times Y, F^{p_1} \otimes_{O_{X \times Y}} G^{p_2}) \approx \dot{\sum_{i+j=n}} H^i(X, F) \otimes_k H^j(Y, G).$$

* Относительно конструкции пучка F^φ см. [6].

Из нее следует, что $H^{r+s}(X \times Y, F^{p_1} \otimes_{O_{X\times Y}} G^{p_2}) \neq 0$, откуда $\operatorname{dimh} X \times Y \geqslant r + s$. Отметим, что при $t > r + s$ соотношение

$$H^t(X \times Y, O^n_{X\times Y}) \neq 0$$

не может иметь места. Это следует из формулы Кюннета в силу

$$O^n_T = O^n_T \otimes_{O_T} O_T = (O^n_X)^{p_1} \otimes_{O_T} O^{p_2}_Y,$$

где $T = X \times Y$.
В случае $\dim X = \operatorname{dimh} X$, $\dim Y = \operatorname{dimh} Y$ в силу теоремы Гротендика из 0.1 имеем

$$\operatorname{dimh} X + \operatorname{dimh} Y \geqslant \dim X \times Y \geqslant \operatorname{dimh} X \times Y \geqslant \operatorname{dimh} X + \operatorname{dimh} Y,$$

откуда следует равенство

$$\operatorname{dimh} X \times Y = \operatorname{dimh} X + \operatorname{dimh} Y.$$

Теорема доказана.

3. Пусть $i : V \to W$ — замкнутое вложение алгебраических многообразий. Тогда верно соотношение

$$\operatorname{dimh} V \leqslant \operatorname{dimh} W.$$

Действительно, если обозначим $\operatorname{dimh} V = r$, то группа $H^r(V, F)$ — ненулевая для некоторого когерентного пучка F на V. На многообразии W рассмотрим когерентный пучок F^W, полученный продолжением пучка F вне многообразия V. Требуемое соотношение вытекает из изоморфизма

$$H^r(W, F^W) \approx H^r(V, F).$$

Заметим, что для открытого вложения это соотношение неверно. Действительно, пусть $V = A^2 \setminus (0)$, $W = A^2$, где A^2 обозначает аффинную плоскость. Тогда $\operatorname{dimh} W = 0$, однако $\operatorname{dimh} V = 1$ (см. 3.1).

4. Выскажем следующую гипотезу: для любого расслоения (E, π, B), слоем которого будет проективное пространство P^r, имеет место формула

$$\operatorname{dimh} E = \operatorname{dimh} B + r.$$

Если она верна, то из нее тривиальным образом следует, что когомологическая размерность при σ-процессе может только возрастать.

Пусть X^* — многообразие, полученное моноидальным преобразованием из неособого, неприводимого алгебраического многообразия X размерности r. Пусть центром этого σ-процесса является неособое d-мерное многообразие $i : V \to X$. Далее, пусть $f : X^* \to X$ — проекция. Полный прообраз V при этой проекции V^* является проективным расслоением ранга $r - d - 1$ с базой V. Ввиду замкнутости вложения $i^* : V^* \to X^*$, сделанной гипотезы и свойства монотонности имеем

$$\operatorname{dimh} X^* \geqslant \operatorname{dimh} V + r + d - 1.$$

В частности, для σ-процесса в точке имеем $\operatorname{dimh} X^* \geqslant r - 1$. Так как $\dim X^* = \dim X$, то в силу известной теоремы (см. 0.1) имеем или $\operatorname{dimh} X^* = r$, или $\operatorname{dimh} X^* = r - 1$. Рассмотрим теперь в качестве X

аффинное многообразие размерности r, а в качестве V берем точку. Очевидно, $\dim h X = 0$. С другой стороны, так как V^* является проективным пространством, то $\dim h X^* = r - 1$. Таким образом при $r > 1$ имеем $\dim h X^* > \dim h X$.

§ 2. Когомологическая размерность одного многообразия

1. Рассмотрим проективное пространство P^r и любое замкнутое подмногообразие Y коразмерности $\geqslant 2$ в нем. В нулевом параграфе мы видели, что группу $H^r(P^r \setminus Y, O(n))$ можно найти из точной последовательности

$$H^r_Y(P^r, O(n)) \to H^r(P^r, O(n)) \to H^r(P^r \setminus Y, O(n)) \to 0.$$

Будет ли на самом деле группа $H^r(P^r \setminus Y, O(n))$ иногда отличной от нуля? Ответ на этот вопрос отрицателен и немедленно получается из следующей теоремы ([3], теор. 6.8): для любой квазипроективной схемы размерности r эквивалентны следующие три условия:

(1) Все неприводимые компоненты X размерности r — несобственные.

(2) $H^r(X, F) = 0$ для любого квазикогерентного пучка F на X.

(3) $H^r(X, O_X(-n)) = 0$ для всех $n \gg 0$, где $O_X(1)$ — «очень обильный» пучок Серра, индуцированный некоторым проективным вложением X.

Так как $X = P^r \setminus Y$ является квазипроективным многообразием размерности r (открытым в P^r), очевидно неприводимым и неполным, то выполнено условие (1). Поэтому условие (2) дает равенство

$$H^r(P^r \setminus Y, F) = 0$$

для любого когерентного пучка F на X.

2. Теорема 2. *Когомологическая размерность квазипроективного многообразия $P^r \setminus Y$, которое получается выкидыванием конечного набора точек $Y = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$ из проективного пространства P^r, равна $r - 1$.*

Доказательство. В силу результата предыдущего пункта достаточно найти такой когерентный пучок F' на $P^r \setminus Y$, для которого группа $H^{r-1}(P^r \setminus Y, F')$ — ненулевая. Оказывается, что можно положить $F' = O(n)$. Мы докажем соотношение $H^{r-1}(P^r \setminus Y, O(n)) \neq 0$ от противного. Допустим, что для любого когерентного пучка F группа $H^{r-1}(P^r \setminus Y, F)$ — нулевая. Тогда в точной последовательности

$$\ldots \to H^{r-1}(P^r \setminus Y, F) \to H^r_Y(P^r, F) \to H^r(P^r, F) \to H^r(P^r \setminus Y, F) \to \ldots$$

крайние группы — нулевые, и мы имеем, в частности, изоморфизм

$$H^r_Y(P^r, O(n)) \approx H^r(P^r, O(n)).$$

Используем предложение 1.9 из работы [3], которое сформулируем в нужной нам форме. Пусть $Y' \subset Y \subset P^r$ — замкнутые подпространства и $Y'' = Y \setminus Y'$. Тогда для любого когерентного пучка F на P^r имеем точную последовательность

$$H^r_{Y'}(P^r, O(n)) \to H^r(P^r, O(n)) \to H^r_{Y''}(P^r, O(n)) \to 0.$$

По формуле ограничения ([3], предл. 1.3) для топологического пространства X, локально замкнутого $Y \subset X$ и открытого $V \subset X$ таких, что $Y \subset V \subset X$, для всякого абелева пучка F на X и для всех i имеет место изоморфизм

$$H^i_Y(X, F) \approx H^i_Y(V, F|V).$$

Возьмем любую точку Q из множества $Y = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$ и рассмотрим в качестве Y'' одноточечное множество $\{Q\}$. Точка Q лежит на некоторой компоненте A стандартного аффинного покрытия пространства P^r. Применим теперь формулу ограничения к предпоследнему члену нашей точной последовательности для пучка $O(n)$. Учитывая аффинность A и изоморфизм $O(n)|_A = O|_A$, будем иметь изоморфизмы

$$H^r_{Y''}(P^r, O(n)) \approx H^r_{Y''}(A, O(n)) \approx H^{r-1}(A \setminus \{Q\}, O).$$

Поэтому точна следующая последовательность:

$$H^r_{Y'}(P^r, O(n)) \to H^r(P^r, O(n)) \xrightarrow{\alpha} H^{r-1}(A^r \setminus Q, O) \to 0,$$

где α является эпиморфизмом k-векторных пространств.

Благодаря результатам Серра из [4] известно, что $H^r(P^r, O(n))$ является конечномерным k-векторным пространством. С другой стороны, вычисления из 3.2 показывают, что k-пространство $H^{r-1}(A^r \setminus Q, O)$ бесконечномерно. Поэтому полученная точная последовательность векторных пространств заключает противоречие. Теорема доказана.

В вопросе о размерности k-пространства $H^r_Y(A, O)$, где $Y = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$, можно ограничиться случаем одноточечного множества Y. Действительно, имеет место следующее

Предложение. Пусть A — аффинное r-мерное многообразие и F — когерентный пучок на A. Если пространство $H^r_Q(A, F)$ бесконечномерно над k для любой точки $Q \in A$, то соотношение

$$\dim_k H^r_{\{Q_1, \ldots, Q_s\}}(A, F) = \infty$$

имеет место для любого конечного набора точек $\{Q_1, \ldots, Q_s\} \subset A$.

Доказательство. По Гротендику [2] для $Q_1 \subset \{Q_1, \ldots, Q_s\} \subset A$ имеем точную последовательность

$$H^r_{Q_1}(A, F) \xrightarrow{\alpha} H^r_{\{Q_1, \ldots, Q_s\}}(A, F) \xrightarrow{\beta} H^r_{\{Q_2, \ldots, Q_s\}}(A, F) \to 0,$$

которую кратко перепишем в виде

$$A(1) \xrightarrow{\alpha} B(s) \to C(s-1) \to 0.$$

Наше предположение дает возможность провести индукцию по числу точек s. Предположим, что утверждение для $s < n$ доказано. Тогда в точной последовательности

$$A(1) \to B(n) \to C(n-1) \to 0$$

член $C(n-1)$ имеет бесконечную размерность, что при конечномерности k-пространства $B(n)$ дает противоречие. Так как вычисления из 3.2 показывают, что $\dim_k H^r_Q(k^r, O) = \dim_k H^{r-1}(k^r \setminus Q, O) = \infty$, то по доказанному для любого конечного набора точек S в k^r k-пространство $H^{r-1}(k^r \setminus S, O)$ бесконечномерно.

3. Характер использованных в доказательстве теоремы 2 фактов из [3] и [4] таков, что утверждение теоремы, очевидно, окажется перенесенным на случай любого проективного многообразия V размерности

$\geqslant 2$, если для любого аффинного многообразия $X = \operatorname{Spec} A$, $\dim A = r$ удалось бы доказать бесконечномерность k-пространства $H^r_Q(X, O_X)$. Очевидно, A можно считать локальным кольцом; тогда всё сводится к доказательству бесконечномерности $H^r_{\mathfrak{m}}(A)$, где $\mathfrak{m} \subset A$ — максимальный идеал.

Как заметил И. Долгачев, для случая, когда все локальные кольца многообразия V являются кольцами Коэна—Маколея (например, когда V — неособо или является локально полным пересечением), это легко вытекает из следующего критерия Гротендика когерентности пучков локальных когомологий:

Пусть X — локально нётерова предсхема, погруженная локально в регулярную предсхему, Y — замкнутое подмножество в X, F — когерентный O_X-Модуль, $c(x) = \dim \{\bar{x}\}$, $n \in Z$. Следующие два условия эквивалентны [8]:

(i) для всех $x \in X \setminus Y$ таких, что $c(x) = 1$, $\operatorname{depth} F_x \geqslant n$,

(ii) для $i \leqslant n$ пучки $\underline{H}^i_Y(F)$ когерентны.

Действительно, возьмем $X = \operatorname{Spec} O_{V,Q} = \operatorname{Spec} A$. Так как по предположению A является кольцом Коэна—Маколея и $c(x) = \dim \{\bar{x}\} = r - \dim A_x = 1$, то $\operatorname{depth} A_x = \dim A_x = r - 1$. Если пространство $H^r_{\mathfrak{m}}(A)$ было бы конечномерным, то выполнялось бы условие (ii) для $n = r$, откуда по (i) $\operatorname{depth} A_x \geqslant r$, что противоречиво.

§ 3. Некоторые вычисления и замечания

1. Рассмотрим алгебраическое многообразие X, которое получается из аффинной плоскости выкидыванием начала координат; оно не будет аффинным, но имеет аффинное покрытие $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$, где $U_1 = X \setminus (x = 0)$, $U_2 = X \setminus (y = 0)$. Если X' — любое многообразие, в котором подмногообразие Y имеет коразмерность $\geqslant 2$, то в силу того, что особенности любой рациональной функции на X' имеют коразмерность 1, получим $H^\circ(X' \setminus Y, O) \approx H^\circ(X', O)$. Поэтому в данном случае $H^\circ(X, O)$ состоит из всех многочленов $P(x, y)$.

Вычислим группу $H^1(\mathfrak{U}, O)$. Очевидно, все коцепи $f_{12} \in C^1(\mathfrak{U})$ имеют вид $\frac{P(x, y)}{x^k y^l}$, где k, l — целые. Ввиду $C^2(\mathfrak{U}) = 0$ все одномерные коцепи являются коциклами. Выяснение вопроса о том, какие из них будут кограницами, равносильно исследованию того, какие $\frac{P(x, y)}{x^{k'} y^{l'}}$ представимы в виде $\frac{x^k P_1(x, y) - y^l P_2(x, y)}{x^k y^l}$, k, $l \geqslant 0$.

Таким образом,

$$H^1(X, O) \approx \left\{\frac{P(x, y)}{x^k y^l}\right\} \Big/ \left\{\frac{x^k P_1(x, y) - y^l P_2(x, y)}{x^k y^l}\right\},$$

где P, P_1, P_2 — произвольные многочлены, а k', l', k, $l \geqslant 0$. Легко можно видеть, что это фактор-пространство бесконечномерно. Для этого заметим, что все выражения $\frac{1}{x^k y^l}$, $k + l \geqslant 2$ дают уже разные классы смежности:

$$\frac{1}{x^k y^l} - \frac{1}{x^m y^n} = \frac{x^{k'} y^{l'} - x^{m'} y^{n'}}{x^p y^q},$$

где $p = \max(k, m)$, $q = \max(l, n)$, $k' = p - k$, $m' = p - m$, $l' = q - l$, $n' = q - n$.

Достаточно доказать, что не существует таких P и Q, что $x^{k'} y^{l'} - x^{m'} y^{n'} = x^p \cdot P - y^q \cdot Q$. Для этого надо рассмотреть два случая:

$$1)\ p = k,\ q = l \quad \text{и} \quad 2)\ p = k,\ q = n.$$

Допустив, что такие P и Q найдутся в первом случае, мы получим

$$x^p \cdot P - y^q \cdot Q = 1 - x^{p-m} y^{q-n},$$

что противоречиво, так как левая часть равенства содержит в качестве слагаемого единицу. Аналогично во втором случае равенство $y^{q-l} - x^{p-m} = x^p \cdot P - y^q \cdot Q$, где $p - m < p$, $q - l < q$, приводит нас к противоречию. Таким образом, соотношение

$$\dim_k H^1(X, O) = \infty$$

доказано.

2. Теорема 3. *Пусть X — r-мерное аффинное пространство с выколотой точкой, определенное над алгебраически замкнутым полем k. Тогда группа когомологий $H^{r-1}(X, O)$ является бесконечномерным векторным пространством над k.*

Доказательство. Рассмотрим аффинное покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)$ для X, где $U_i = (x_i \neq 0)$, $i = 1, \ldots, r$. Ввиду $\dim \mathfrak{U} = r - 1$ все $(r-1)$-мерные коцепи будут коциклами. Элементы $f_{1, \ldots, r} \in C^{r-1}(\mathfrak{U})$ имеют вид

$$\frac{P(x_1, \ldots, x_r)}{x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}}.$$

Пусть ϱ_i — гомоморфизмы ограничения, т. е.

$$\varrho_i : \Gamma\left(\bigcap_{j \neq i} U_j, O\right) \to \Gamma\left(\bigcap_j U_j, O\right).$$

Так как по определению дифференциала d

$$df = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \varrho_j \left(\frac{P_j(x_1, \ldots, x_n)}{x_1^{i_1(j)} \ldots \widehat{x_j} \ldots x_r^{i_r(j)}} \right),$$

то для вычисления группы $H^{r-1}(\mathfrak{U}, O)$ нам надо выяснить, какие выражения $\dfrac{P(x_1, \ldots, x_r)}{x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}}$ представимы в виде

$$\frac{1}{x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}} \left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} x_1^{\alpha_1 - i_1(j)} \ldots x_j^{\alpha_j} \ldots x_r^{\alpha_r - i_r(j)} \cdot P_j'(x_1, \ldots, x_r) \right) =$$

$$= \frac{1}{x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}} \left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} x_j^{\alpha_j} P_j(x_1, \ldots, x_r) \right),$$

где

$$\alpha_k = \max_{1 \leq j \leq r} i_k(j), \quad k = 1, \ldots, r.$$

Обозначим эту эквивалентность через $\mathcal{E}$. Докажем бесконечномерность фактор-пространства $\left\{\dfrac{P(x_1, \ldots, x_r)}{x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}}\right\} / \mathcal{E}$ над полем k.

Для этого достаточно заметить, что в случае, если найдется j, для которого $i_j \neq k_j$, то выражения

$$I_1 = \frac{1}{x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{1}{x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}}, \quad \forall i_j > 0,\ k_j > 0,$$

$j = 1, \ldots, r$ будут лежать в разных смежных классах. Обозначим

$$\alpha_j = \max(i_j, k_j),\ j = 1, \ldots, r.$$

Тогда

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}} (x_1^{\alpha_1 - i_1} \ldots x_r^{\alpha_r - i_r} - x_1^{\alpha_1 - k_1} \ldots x_r^{\alpha_r - k_r}).$$

Мы должны выяснить, представимо ли выражение, находящееся в скобках, в виде

$$\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} x_j^{\alpha_j} P_j(x_1, \ldots, x_r).$$

Без ограничения общности можно считать, что существует число s, для которого $\alpha_1 = i_1, \ldots, \alpha_s = i_s, \alpha_{s+1} = k_{s+1}, \ldots, \alpha_r = k_r$. Выражение в скобках примет вид

$$(*)\quad x_{s+1}^{\alpha_{s+1} - i_{s+1}} \ldots x_r^{\alpha_r - i_r} - x_1^{\alpha_1 - k_1} \ldots x_s^{\alpha_s - k_s},$$

где $\alpha_{s+1} - i_{s+1} < \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{r-i_r} < \alpha_r$; $\alpha_1 - k_1 < \alpha_1, \ldots, \alpha_s - k_s < \alpha_s$. Но эти неравенства показывают, что (*) нельзя представить в виде

$$\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} x_j^{\alpha_j} P_j(x_1, \ldots, x_r).$$

Утверждение доказано.

3. Как доказал М. Кнезер, в 3-мерном пространстве X' всякую неприводимую кривую E можно вырезать тремя алгебраическими поверхностями, которые обозначим V_0, V_1, V_2. Ввиду $E = \bigcap\limits_i V_i$ для $X = X' \setminus E$ имеем открытое аффинное покрытие $\mathfrak{U} = (U_i = X' \setminus V_i)$ и можем применить следующую теорему Серра [4]. Пусть X — алгебраическое многообразие, F — когерентный пучок на X и $\mathfrak{U} = (U_i)$ — конечное аффинное покрытие X. Тогда для всякого $i \geqslant 0$ гомоморфизм

$$\sigma(\mathfrak{U}): H^i(\mathfrak{U}, F) \to H^i(X, F)$$

будет изоморфизмом. Так как $\dim \mathfrak{U} = 2$, то по этой теореме $H^3(X, F) = 0$ для всех когерентных пучков на X. Возникает интересный вопрос: будет ли для некоторой неприводимой кривой E и для некоторого когерентного пучка F на X группа $H^2(X, F)$ отличной от нуля? Это связано с гипотезой о невозможности вырезать двумя поверхностями любую кривую в 3-мерном пространстве. Действительно, мы получили бы доказательство этого отрицательного утверждения, если бы для некоторой кривой E ответ на поставленный вопрос оказался положительным. Вопрос о нетривиальности группы $H^2(X, F)$ возникает и в

* Примечание при корректуре. Р. Хартшорн (Ann. Math., 3, 444 (1968)) доказал, что $H^2(P^3 \setminus E, F) = 0$ для всех F.

связи с гипотезой о том, что каждое векторное расслоение ранга 2 над 3-мерным аффинным пространством будет тривиальным. Действительно, Серр в [9] доказал, что если эта проблема имеет положительное решение, то всякая неособая рациональная или эллиптическая кривая в 3-мерном аффинном пространстве будет полным пересечением. Поэтому гипотеза будет опровергнута, если в 3-мерном аффинном пространстве удастся найти такую неособую рациональную или эллиптическую кривую E, что $H^2(CE, F) \neq 0$ для некоторого когерентного пучка F. Это показывает, что вопрос, возможно, решается в терминах гомологической алгебры.

В работе [10] Хартшорн вводит понятие локальной связности многообразия в коразмерности 1, обозначая этим ситуацию, в которой выкидывание из многообразия подмногообразий коразмерности больше единицы не нарушает структуру связности многообразия. Он получает необходимое условие для того, чтобы многообразие было полным пересечением — требуется локальная связность этого многообразия в коразмерности 1. Оказывается, нетривиальность групп $H^i(X' \setminus V, O)$, $i \geqslant 2$ не будет необходимым условием для непредставимости этого многообразия в виде полного пересечения. Это подтверждает следующий пример.

Рассмотрим в комплексном аффинном пространстве $X' = C^4$ с топологией Зарисского многообразие V, которое является объединением двух плоскостей: $x_1 = x_2 = 0$ и $x_3 = x_4 = 0$. Ясно, что в начале координат это многообразие не будет связным в коразмерности 1 и поэтому не может быть полным пересечением. Однако вычисления показывают, что

$$H^2(CV, O) = H^3(CV, O) = 0,$$

где CM обозначает дополнение в C^4 к множеству M. Имеем

$$X = CV = C[(x_1 = x_2 = 0) \cup (x_3 = x_4 = 0)] =$$
$$= C(x_1 = x_2 = 0) \cap C(x_3 = x_4 = 0) = \bigcup_{i=0}^{3} U_i,$$

$U_0 = (x_1 \neq 0) \cap (x_3 \neq 0)$, $U_1 = (x_1 \neq 0) \cap (x_4 \neq 0)$, $U_2 = (x_2 \neq 0) \cap (x_3 \neq 0)$, $U_3 = (x_2 \neq 0) \cap (x_4 \neq 0)$. Берем для X покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)$. По теореме Серра $H^i(X, O) \approx H^i(\mathfrak{U}, O)$, $i = 2, 3$. Вычислим группу $H^3(\mathfrak{U}, O)$. Для этого заметим, что 3-мерные коцепи будут иметь вид $\dfrac{P(x, y, z, t)}{x^k y^l z^m t^n}$. Очевидно, все 3-мерные коцепи будут коциклами. Для всех $j = 0, 1, 2, 3$ имеем $\bigcap\limits_{i \neq j} U_i = \bigcap\limits_{i} U_i$; поэтому все гомоморфизмы ограничения

$$\varrho_i : \Gamma(\bigcap_{j \neq i} U_j, O) \to \Gamma(\bigcap_{j} U_j, O), \quad i = 0, 1, 2, 3$$

будут тождественными. Теперь легко видеть, что все 3-мерные коциклы точны, т. е. $H^3(\mathfrak{U}, O) = 0$. Аналогичные рассуждения показывают также тривиальность группы $H^2(\mathfrak{U}, O)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nagata M., J. Math. Kyoto Univ., 2, 1 (1962).
2. Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, М., 1961.
3. Grothendieck A., Local cohomology, Seminar in Harvard, Notes by R. Hartshorne, Harvard University, 1961.

4. Серр Ж. П., Когерентные алгебраические пучки, Сб. Расслоенные пространства, М., 1955.
5. Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., 1960.
6. Sampson J. H., Washnitzer G., Ann. Math., **68**, 348 (1958).
7. Sampson J. H., Washnitzer G., Illinois J. Math., **3**, 389 (1959).
8. Grothendieck A., Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Leftshetz locaux et globaux, Seminaire de Géométrie Algébrique, exposé 8, 8—2—3, I. H. E. S., 1962.
9. Serre J. P., Sur les modules projectifs, Seminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et Théorie des nombres, 14-e année, no. 2, 1960—1961.
10. Hartshorne R., Am. J. Math., **84**, 497 (1962).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
16/IX 1968

U. KALJULAID

MÕNINGATE KVAASIPROJEKTIIVSETE MUUTKONDADE KOHOMOLOOGILISEST DIMENSIOONIST

Tõestatakse, et r-dimensioonilises projektiivses Cohen—Macaulay muutkonnas suvalise lõpliku punktihulga täiendi kohomoloogiline dimensioon on $r-1$.

U. KALJULAID

ON THE COHOMOLOGICAL DIMENSION OF SOME QUASIPROJECTIVE VARIETIES

It has been shown in this article that the cohomological dimension of the complement of any finite set of points in r-dimensional projective Cohen—Macaulay variety is equal to $r-1$.