EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.3.06

В. УНТ

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассматриваются уравнения Эйнштейна в первом приближении при наличии электромагнитного излучения. В пункте 2 нахождение приближенных решений уравнений Эйнштейна сведено к простым алгебраическим действиям и к интегрированию обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (10)—(13). В пункте 3 показано, что при соблюдении условий сходимости унесенная электромагнитными волнами масса описывается не зависящим от полярных углов аспектом массы, а настоящей массой. Показано, что условия сходимости (16) можно физически интерпретировать как отклонение лучей в гравитационном поле массы, переносимой излучением. В пунктах 4 и 5 найдены приближенные интегралы уравнений Эйнштейна в случае электромагнитного дипольного и квадрупольного излучения с учетом всех отрицательных степеней r.

1. Введение

Имеется большая математическая аналогия между интегрированием уравнений Эйнштейна в первом приближении при наличии электромагнитного излучения и интегрированием уравнений Эйнштейна во втором приближении при наличии гравитационного излучения. В обоих случаях возникают одинаковые математические трудности, связанные с расходимостью решений, получаются также физически не очень ясные результаты. Разработанный в нашей статье [1] метод позволяет при аксиально-симметричных источниках преодолеть эти трудности в случае как электромагнитного, так и гравитационного излучения. В данной работе мы проинтегрируем уравнения Эйнштейна в первом приближении в аксиально-симметричном случае при наличии электромагнитного дипольного и квадрупольного излучения. Эта задача является простейшей иллюстрацией применения нашего метода. С другой стороны, так как физические свойства электромагнитного излучения известны несравненно лучше, чем свойства гравитационного излучения, то большая математическая аналогия между указанными двумя случаями может привести к лучшему пониманию свойств гравитационного излучения.

В пункте 2 будем развивать дальше нашу схему интегрирования уравнений Эйнштейна, выпишем в виде специальных рядов компоненты метрического тензора и найдем из уравнений Эйнштейна коэффициенты разложения. В пункте 3 рассмотрим перенос массы электромагнитным излучением, а в пунктах 4 и 5 — электромагнитное дипольное и квадрупольное излучение в общей теории относительности, учитывая в решении все отрицательные степени радиуса. Формулы для вычисления тензора энергии-импульса электромагнитного поля, а также конкретные выражения для этого тензора в случае дипольного и квадрупольного излучения приведены в приложении.

Предположим, что источники электромагнитного поля и гравитационного поля с ненулевой массой покоя сосредоточены в конечной области пространства, и рассмотрим поле далеко от этих источников. Линейный элемент пространства-времени взят в виде

$$ds^2 = (V r^{-1} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma})\, du^2 + 2e^{2\beta}\, du\, dr +$$
$$+ 2U r^2 e^{2\gamma}\, du\, d\vartheta - r^2 (e^{2\gamma} d\vartheta^2 + e^{-2\gamma} \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2).$$

Будем пользоваться единицами измерения, в которых скорость света равняется 1.

2. Формулы и уравнения для определения компонент метрического тензора

Формализм, развитый в работе [1], применим в случае электромагнитного излучения, если положить, что введенные там символы $\langle s, \mu\nu \rangle$ имеют следующее значение:

$$\langle s, \mu\nu \rangle \overset{\text{опр}}{=} 8\pi^{(s)} T_{\mu\nu}(u, \vartheta), \quad T_{\mu\nu} = \sum_s {}^{(s)} T_{\mu\nu} r^{-s}.$$

Здесь $T_{\mu\nu}$ — компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля. При интегрировании уравнений Эйнштейна в первом приближении берем значения $T_{\mu\nu}$ в плоском пространстве-времени. Формулы для вычисления $T_{\mu\nu}$ в виде ряда по отрицательным степеням r приведены в приложении.

Будем развивать дальше формализм статьи [1]. Введем обозначение

$$\langle 22 \pm 33 \rangle \overset{\text{опр}}{=} 8\pi T_{22} \pm \frac{8\pi}{\sin^2 \vartheta} T_{33}.$$

Величины $\langle s, \mu\nu \rangle$ зависят от u и ϑ. Разложим $\langle s, \mu\nu \rangle$ и компоненты метрического тензора в ряд по присоединенным полиномам Лежандра $P_k^{(m)}$. Беря для каждой разлагаемой величины специально подобранное фиксированное значение m, можем в уравнениях поля разделить переменные. Положим $\langle s, \mu\nu \rangle = \sum\limits_k \langle s, \mu\nu, k \rangle P_k^{(m)}$, где

$m = 0$ при $\mu\nu = 11$,	$m = 0$ при $\mu\nu = 22 + 33$,
$m = 1$ при $\mu\nu = 12$,	$m = 0$ при $\mu\nu = 00$, $\quad s = 2$,
$m = 2$ при $\mu\nu = 22 - 33$,	$m = 1$ при $\mu\nu = 02$, $\quad s = 2$.

Произведем также разложения $\left(F' \overset{\text{опр}}{=} \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)$:

$$\gamma = \sum_{s,k} a_{sk}(u)\, P_k^{(2)}(\cos\vartheta)\, r^{-s}, \tag{1}$$

$$\beta = \sum_{s,k} {}^{(s)}\beta_k(u)\, P_k(\cos\vartheta)\, r^{-s}, \tag{2}$$

$$U = \sum_{s,k} {}^{(s)} U_k(u)\, P_k^{(1)} r^{-s} + 2N(u, \vartheta)\, r^{-3}, \tag{3}$$

$$V = \sum_{s,k} {}^{(s)}V_k(u)\, P_k r^{-s} - 2M(u, \vartheta) - (N' + N \cot\vartheta) r^{-1}, \tag{4}$$

$$N = \sum_k \nu_k(u)\, P_k^{(1)}(\cos\vartheta), \tag{5}$$

$$M = \sum_k \mu_k(u)\, P_k(\cos\vartheta). \tag{6}$$

Пользуясь формулами (10), (13) и (17) из работы [1], получаем:

$${}^{(s)}\beta_k = -\frac{1}{4s} \langle s+2,\, 11,\, k \rangle, \tag{7}$$

$${}^{(s)}U_k = \frac{2}{s(s-3)} \left[{}^{(s)}Q_{1k} - (s-1)(k-1)(k+2)\,\alpha_{s-1,\,k} \right], \tag{8}$$

$${}^{(s)}V_k = \frac{1}{2s}\, {}^{(s+1)}Q_{2k} - \frac{2(k+2)!}{(k-2)!\,(s-1)(s+2)}\, \alpha_{s+1,\,k}, \quad s \neq 0, \tag{9}$$

где

$${}^{(s)}Q_{1k} = \langle s,\, 12,\, k \rangle + \frac{(s+1)}{4(s-1)} \langle s+1,\, 11,\, k \rangle, \qquad k \geqslant 1,$$

$${}^{(s)}Q_{2k} = \langle s,\, 22+33,\, k \rangle - \frac{2k(k+1)(s-3)}{(s-2)(s+1)} \langle s+1,\, 12,\, k \rangle +$$

$$+ \frac{1}{s} \langle s+2,\, 11,\, k \rangle + \frac{2k(k+1)}{s(s-2)(s+1)} \langle s+2,\, 11,\, k \rangle.$$

Для полного определения компонент метрического тензора нужно знать еще α_{sk}, μ_k и ν_k, для которых в работе [1] были получены следующие уравнения * (точка обозначает производную по u):

$$\dot{\mu}_k = \frac{(k+2)!}{2(k-2)!}\, \dot{\alpha}_{1k} + q_{0k}(u), \qquad 0 \leqslant k < \infty, \tag{10}$$

$$-3\dot{\nu}_k = \mu_k + q_{1k}(u), \qquad 1 \leqslant k < \infty, \tag{11}$$

$$4\dot{\alpha}_{3k} = -\nu_k + q_{2k}(u), \qquad 2 \leqslant k < \infty, \tag{12}$$

$$\dot{\alpha}_{s+1,\,k} = \frac{(s-1)(k-s+1)(k+s)}{2(s-2)(s+1)}\, \alpha_{sk} + \frac{1}{2s} q_{sk}, \tag{13}$$

$$s \geqslant 3, \qquad 2 \leqslant k < \infty.$$

Здесь

$$q_{0k} = -\tfrac{1}{2} \langle 2,\, 00,\, k \rangle, \qquad q_{1k} = -\langle 2,\, 02,\, k \rangle,$$

$$q_{sk} = -\frac{1}{(s+1)(s-2)} \left[\tfrac{1}{2} \langle s+2,\, 11,\, k \rangle + (s-1) \langle s+1,\, 12,\, k \rangle \right] -$$

$$- \tfrac{1}{2} \langle s,\, 22-33,\, k \rangle, \qquad \text{если } s \geqslant 2 \ \text{ и } \ k \geqslant 2.$$

Интеграл уравнений (10)—(13) определен (с точностью до постоянных интегрирования) величинами q_{rs} и α_{1k}. Первые из них порождаются

---

* Отметим, что формулы и уравнения (1)—(13) справедливы также в случае нахождения решений уравнений Эйнштейна в $(n+1)$-м приближении при наличии гравитационного излучения. Тогда нужно только $\langle \mu\nu \rangle$ приравнять нелинейной части тензора Риччи.

электромагнитным излучением, вторые определяют конкретный вид гравитационного излучения. Кроме того, α_{1k} должны содержать еще слагаемые, порождающие в ν_k и α_{rs} члены, компенсирующие влияние таких q_{rs}, которые привели бы к появлению расходимостей. В данной работе будем учитывать только вторую часть α_{1k}, оставляя в стороне рассмотрение чистого гравитационного излучения.

Вся задача интегрирования уравнений Эйнштейна в первом приближении сведена к нахождению нерасходящихся интегралов уравнений (10)—(13). Если обычно приходится иметь дело со столь сложными уравнениями, что условия сходимости исследовать очень трудно, то в настоящем случае эта задача вполне посильна. Далее займемся интегрированием уравнений (10)—(13).

3. О переносе массы электромагнитными волнами

Рассмотрим поле далеко от источников. Пусть в галилеевых координатах компоненты вектор-потенциала электромагнитного поля A_μ имеют вид

$$A_\mu = \frac{{}^{(1)}A_\mu(u, \vartheta)}{r} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Тогда для компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля имеем следующее выражение:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\sigma(u, \vartheta)}{4\pi r^2} k_\mu k_\nu + 0\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{14}$$

Здесь $\sigma = {}^{(0)}\dot{A}_\vartheta^2$, а k_μ — компоненты волнового вектора $(\mu = 0, 1, 2, 3)$. Так как при нашем подходе применим принцип линейной суперпозиции, то в интеграле уравнений (10)—(13) можно выделить вклад от отдельных q_{sk}. В данном пункте проинтегрируем уравнения (10)—(13), учитывая в правой части равенства (14) только первый член. Это равносильно тому, если бы мы в уравнениях (10)—(13) учитывали только q_{0k}, отбрасывая остальные q_{sk}. Это приближение определяет перенос массы. Учитывая, что q_{0k} являются коэффициентами в разложении — $\sigma(u, \vartheta)$ в ряд по полиномам Лежандра, можем написать:

$$q_{0k}(u) = -\frac{2k+1}{2}\int\limits_0^\pi \sigma(u, \vartheta) P_k(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{15}$$

Если при $k > 1$ некоторые $q_{0k} \geqslant 0$ или $q_{0k}(u) \leqslant 0$ $(q_{0k} \not\equiv 0)$ и $\alpha_{1k} = 0$, то при интегрировании уравнений (10)—(13) мы получили бы для $\nu_k(u)$ и $\alpha_{sk}(u)$ $(s \geqslant 3)$ выражения, расходящиеся при $u \to \infty$. Во избежание этого выберем α_{1k} так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{(k+2)!}{(k-2)!}\dot{\alpha}_{1k} + q_{0k} = 0 \qquad \text{при } k \geqslant 2. \tag{16}$$

Интеграл уравнений (10)—(13) получаем теперь в следующем виде ($u_1 = \text{const}$ — передний фронт волны):

$$\mu_0(u) = m_0 - \tfrac{1}{2}\int\limits_{u_1}^{u}\int\limits_0^\pi \sigma(\bar{u}, \vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\bar{u},$$

где m_0 — постоянная начальная масса источника гравитационного поля. Остальные * $\mu_k = 0$; $\nu_k = 0$ при $k \geqslant 2$ и $\alpha_{sk} = 0$ при $s \geqslant 3$. Подставляя найденные μ_k в соотношение (6), имеем

$$M = m_0 - \tfrac{1}{2} \int_{u_1}^{u} \int_0^{\pi} \sigma(\bar{u}, \vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\bar{u}. \tag{4a}$$

Интеграл в выражении (4a) равен массе, унесенной электромагнитным излучением. Х. Бонди и др. [2] не удалось объяснить трудность, связанную с зависимостью M от полярных углов. Благодаря условиям (16), мы получили для M не зависящее от полярных углов выражение. Но наряду с этим, условия (16) порождают монотонные изменения в α_{1k}, γ и U. Введем обозначение

$$\int_{u_1}^{u} q_{0k}(\bar{u}) \, d\bar{u} \overset{\text{опр}}{=} A_k(u), \qquad k \geqslant 2. \tag{17}$$

Тогда

$$\alpha_{1k} = -\frac{2(k-2)!}{(k+2)!} A_k. \tag{16a}$$

Учитывая в компонентах метрического тензора только члены, содержащие A_k, получаем из (16a) и (1)—(9)

$$\gamma = -\frac{2}{r} \sum_k \frac{(k-2)!}{(k+2)!} A_k(u) P_k^{(2)}(\cos\vartheta), \tag{18}$$

$$U = -\frac{2}{r^2} \sum_k \frac{A_k(u) P_k^{(1)}(\cos\vartheta)}{k(k+1)}, \tag{19}$$

$$\beta = V = 0.$$

Как объяснить подобные монотонные изменения γ и U? Покажем, что (18)—(19) можно получить и следующим преобразованием координат, оставаясь в рамках координатной системы Бонди ($\bar{u}, \bar{r}, \bar{\vartheta}$ — старые координаты):

$$\bar{u} = u - H(u, \vartheta), \tag{20}$$

$$\bar{r} = r - \frac{1}{2\sin\vartheta} (\sin\vartheta \, H')', \tag{21}$$

$$\bar{\vartheta} = \vartheta + H' r^{-1}, \tag{22}$$

$$H = -\sum_k \frac{4(k-2)!}{(k+2)!} A_k(u) P_k(\cos\vartheta), \qquad (k \geqslant 2). \tag{23}$$

Если не учитывать слагаемых, в которых встречается $\dot{A}_k$, так как они монотонных изменений не дают и после прекращения электромагнитного излучения равны нулю, то преобразование координат (20)—(22)

---

* Постоянные интегрирования положены равными нулю. Физически это означает, что до начала излучения поле является центрально-симметричным.

Величина μ_1 пропорциональна импульсу источника, ν_1 — дипольному моменту. Преобразованием координат можно их сделать равными нулю.

сводится к появлению в метрике следующих членов (Δ^* — оператор Лапласа на сфере):

$$\gamma = \frac{1}{2r}(H'' - \cot\vartheta\, H'),$$

$$U = -\frac{1}{r^2}[H' + \tfrac{1}{2}(\Delta^* H)'].$$

Подставляя сюда H из (23), получаем выражения (18) и (19).

Теперь можем раскрыть физическое содержание условий (16). Так как в рассматриваемом приближении условия (16) эквивалентны преобразованию координат (20)—(23), то возможна следующая интерпретация. В пустом пространстве исходящий из начала координат «пробный луч» движется по прямой $\bar{\vartheta} = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. При наличии электромагнитного излучения траектория луча описывается уравнениями $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, где связь между $\bar{\vartheta}$ и ϑ дана соотношением (22). Отклонение луча от первоначального направления обусловлено массой, переносимой электромагнитным излучением.

Вернемся еще к проблеме переноса массы. Если до начала излучения ($u \leqslant u_1$) мы имеем решение Шварцшильда с массой центрального тела m_0, то после прекращения электромагнитного излучения ($u \geqslant u_2$), когда поле становится опять центрально-симметрическим, имеем снова решение Шварцшильда. Теперь масса источника $m_0 - \Delta m$, где

$$\Delta m = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{u_1}^{u_2} \sigma(\bar{u}, \vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\bar{u}.$$

Отсюда получается естественная интерпретация Δm как массы, унесенной электромагнитным излучением. Этот результат совпадает с результатом, вытекающим из теории Максвелла. Действительно, учитывая выражение (14), получаем для электромагнитной массы, протекающей через поверхность $r = \text{const}$ при $r \to \infty$, выражение

$$\Delta m = \lim_{r\to\infty}\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} T_{00}\, r^2 \sin\vartheta\, du\, d\vartheta\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_0^{\pi} \sigma\sin\vartheta\, du\, d\vartheta.$$

4. Дипольное электромагнитное излучение

Проинтегрируем уравнения (10)—(13) в случае дипольного излучения с учетом всех q_{sk}. Пользуясь приведенными в приложении компонентами тензора энергии импульса электромагнитного дипольного излучения, найдем q_{sk}:

$$q_{00} = -\frac{2}{3}\ddot{D}^2, \qquad q_{02} = \frac{2}{3}\ddot{D}^2, \qquad q_{12} = \frac{4}{3}\dot{D}\ddot{D},$$

$$q_{22} = \frac{2}{3}D\ddot{D}, \qquad \text{остальные } q_{sk} = 0.$$

В рассматриваемом частном случае уравнения (10)—(13) имеют вид

$$\dot{\mu}_0 = -\frac{2}{3}\ddot{D}^2, \qquad -3\dot{\nu}_2 = \mu_2 + \frac{4}{3}\dot{D}\ddot{D},$$

$$\dot{\mu}_2 = 12\dot{\alpha}_{12} + \frac{2}{3}\ddot{D}^2, \qquad 4\dot{\alpha}_{32} = -\nu_2 + \frac{2}{3}D\ddot{D}.$$

При остальных значениях индексов $\dot{\mu}_k = \dot{\nu}_k = \dot{\alpha}_{rs} = 0$. Нерасходящиеся интегралы этих уравнений следующие (постоянные интегрирования приравнены нулю):

$$\alpha_{12} = -\frac{1}{12}\Delta m + \frac{2}{9}\dot{D}\ddot{D},$$

$$\mu_0 = -\Delta m, \quad \Delta m \overset{\text{опр}}{=} \frac{2}{3}\int_{u_1}^{u} \ddot{D}^2(\bar{u})\,d\bar{u},$$

$$\mu_2 = \frac{8}{3}\dot{D}\ddot{D}, \quad \nu_2 = -\frac{2}{3}\dot{D}^2, \quad \alpha_{32} = \frac{1}{6}D\dot{D}.$$

При других значениях индексов $\mu_k = \nu_k = \alpha_{sk} = 0$. Первый член в α_{12} — интеграл уравнения (16) при $k = 2$, $q_{02} = \frac{2}{3}\ddot{D}^2$. Второй член в α_{12} выбран так, чтобы исключить из α_{32} слагаемые типа $\text{const}\cdot\int_{u_1}^{u}\dot{D}^2(\bar{u})\,d\bar{u}$, дающие монотонные изменения α_{32}. Далее, для вычисления компонент метрического тензора нужно проделать ряд простых алгебраических операций. Сначала найдем встречающиеся в (8) и (9) ${}^{(s)}Q_{nk}$, которые не равны нулю:

$${}^{(4)}Q_{12} = \frac{4}{3}D\dot{D}, \qquad {}^{(5)}Q_{12} = \frac{5}{6}D^2,$$

$${}^{(2)}Q_{20} = \frac{8}{3}\dot{D}^2, \qquad {}^{(3)}Q_{20} = \frac{16}{3}D\dot{D}, \qquad {}^{(4)}Q_{20} = 3D^2,$$

$${}^{(2)}Q_{22} = \frac{16}{3}\dot{D}^2, \qquad {}^{(3)}Q_{22} = \frac{32}{3}D\dot{D}, \qquad {}^{(4)}Q_{22} = 3D^2.$$

Вичислив на основании формул (7)—(9) ${}^{(s)}\beta_k$, ${}^{(s)}U_k$, ${}^{(s)}V_k$ и подставив их вместе с M и N в ряды (1)—(4) для γ, β, U и V, имеем

$$\gamma = \left(-\frac{\Delta m}{12r} + \frac{2}{9}\frac{\dot{D}\ddot{D}}{r} + \frac{1}{6}\frac{D\dot{D}}{r^3}\right)P_2^{(2)}(\cos\vartheta),$$

$$\beta = -\frac{1}{8}\frac{D^2}{r^4}\left[\frac{2}{3}P_0 - \frac{2}{3}P_2(\cos\vartheta)\right],$$

$$U = \left(-\frac{\Delta m}{3r^2} + \frac{8}{9}\frac{\dot{D}\ddot{D}}{r^2} - \frac{4}{3}\frac{\dot{D}^2}{r^3} - \frac{1}{3}\frac{D\dot{D}}{r^4} + \frac{1}{6}\frac{D^2}{r^5}\right)P_2^{(1)}(\cos\vartheta),$$

$$V = r - 2(m_0 - \Delta m) + \frac{4}{3}\frac{\dot{D}^2}{r} + \frac{4}{3}\frac{D\dot{D}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{D^2}{r^3} +$$

$$+\left(-\frac{16}{3}\dot{D}\ddot{D} - \frac{4}{3}\frac{\dot{D}^2}{r} + \frac{2}{3}\frac{D\dot{D}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{D^2}{r^3}\right)P_2(\cos\vartheta).$$

Если после прекращения электромагнитного излучения поле становится опять центрально-симметрическим ($D=0$), то получим снова решение Шварцшильда с массой центрального тела $m-\Delta m$. Величина Δm в выражениях для γ и U исключается преобразованием координат (20)—(22), если положить

$$H=\frac{\Delta m}{6}P_2(\cos\vartheta). \tag{24}$$

Мы могли бы с самого начала производить все вычисления в координатной системе, получаемой из системы, в которой вычислены уравнения (1)—(9), преобразованием координат (20)—(22) и (24), оставаясь все еще в рамках координатной системы Бонди. В этом случае монотонные члены в γ и U отсутствуют, но сам формализм сложнее. Ряды для V, U и β имеют тогда следующий вид:

$$Vr^{-1}=-2\dot{H}-\Delta^*\dot{H}+0\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$U=-\frac{\dot{H}}{r}+0\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\beta=-\tfrac{1}{2}\dot{H}+0\left(\frac{1}{r}\right).$$

Выше мы получили для массы, унесенной электромагнитным излучением, выражение

$$\Delta m=\frac{2}{3}\int\limits_{u_1}^{u_2}\ddot{D}^2(u)\,du.$$

Этот же результат вытекает непосредственно из электромагнитной теории Максвелла (см. [3], с. 230).

5. Квадрупольное электромагнитное излучение

Проинтегрируем уравнения (10)—(13) для чистого электромагнитного квадрупольного излучения. Это даст нам позже возможность сравнивать электромагнитное квадрупольное излучение с гравитационным квадрупольным излучением (как хорошо известно, гравитационного дипольного излучения не существует). Кроме того, квадрупольное электромагнитное излучение в случае нашего формализма представляет с чисто математической точки зрения больший интерес, чем дипольное излучение. Объясним это подробнее. Интеграл уравнений (10)—(13) определяется функциями $q_{sk}(u)$ и $\alpha_{1k}(u)$; первые из них нам заданы, вторые выбираем, исходя из условий сходимости. Но вследствие множителя $(k-s+1)$ перед α_{sk} в выражении (13) влияние α_{1k} распространяется только до $\alpha_{k+1,k}$, а α_{sk} при $s\geqslant k+2$ определены полностью величинами q_{sk}. Нас интересует проблема, имеют ли q_{sk} при $s\geqslant k+1$ такой вид, при котором интеграл уравнений (10)—(13) является сходящимся. В случае дипольного излучения такая проблема не возникала, так как выполнялось условие $q_{sk}=0$, если $s>k$. Займемся интегрированием уравнений (10)—(13). Воспользуемся значениями $\langle\mu\nu,k\rangle$, приведенными в приложении, и вычислим q_{sk} для случая электромагнитного квадрупольного излучения (α — квадрупольный момент источника):

$$q_{00} = -\frac{1}{30}\dddot{\alpha}^2,$$

$$q_{02} = -\frac{1}{42}\dddot{\alpha}^2, \qquad q_{04} = \frac{2}{35}\dddot{\alpha}^2,$$

$$q_{12} = \frac{1}{21}\ddot{\alpha}\,\dddot{\alpha}, \qquad q_{14} = \frac{3}{35}\ddot{\alpha}\,\dddot{\alpha},$$

$$q_{22} = \frac{1}{14}\dot{\alpha}\,\dddot{\alpha}, \qquad q_{24} = \frac{1}{35}\dot{\alpha}\,\dddot{\alpha},$$

$$q_{32} = \frac{1}{7}(\alpha\,\dddot{\alpha} + \dot{\alpha}\,\ddot{\alpha}), \qquad q_{34} = \frac{1}{35}\left(2\alpha\,\dddot{\alpha} - \frac{3}{2}\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha}\right),$$

$$q_{42} = \frac{6}{35}(2\alpha\,\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2), \qquad q_{44} = \frac{3}{175}(\alpha\,\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2),$$

$$q_{52} = \frac{11}{21}\alpha\,\dot{\alpha}, \qquad q_{54} = -\frac{2}{35}\alpha\,\dot{\alpha},$$

$$q_{62} = \frac{12}{49}\alpha^2, \qquad q_{64} = -\frac{3}{98}\alpha^2.$$

Остальные q_{sk} равны нулю.

Уравнения (10)—(13) разбиваются на три группы в соответствии со значениями индекса k:

$$\dot{\mu}_0 = q_{00}, \tag{25}$$

$$\dot{\mu}_2 = 12\dot{\alpha}_{12} + q_{02}, \qquad \dot{\mu}_4 = 180\dot{\alpha}_{14} + q_{04},$$

$$-3\dot{\nu}_2 = \mu_2 + q_{12}, \qquad -3\dot{\nu}_4 = \mu_4 + q_{14},$$

$$4\dot{\alpha}_{32} = -\nu_2 + q_{22}, \qquad 4\dot{\alpha}_{34} = -\nu_4 + q_{24},$$

$$\dot{\alpha}_{42} = 0\cdot\alpha_{32} + \frac{1}{6}q_{32}, \qquad \dot{\alpha}_{44} = \frac{7}{2}\alpha_{34} + \frac{1}{6}q_{34},$$

$$\dot{\alpha}_{52} = -\frac{9}{10}\alpha_{42} + \frac{1}{8}q_{42}, \qquad \dot{\alpha}_{54} = \frac{6}{5}\alpha_{44} + \frac{1}{8}q_{44},$$

$$\dot{\alpha}_{62} = -\frac{14}{9}\alpha_{52} + \frac{1}{10}q_{52}, \qquad \dot{\alpha}_{64} = 0\cdot\alpha_{54} + \frac{1}{10}q_{54},$$

$$\dot{\alpha}_{72} = -\frac{15}{7}\alpha_{62} + \frac{1}{12}q_{62}, \qquad \dot{\alpha}_{74} = -\frac{25}{28}\alpha_{64} + \frac{1}{12}q_{64}.$$

Интеграл уравнения (25) следующий:

$$\mu_0 = -\Delta m, \qquad \Delta m \overset{\text{опр}}{=} \frac{1}{30}\int_{u_1}^{u}\dddot{\alpha}^2(\bar{u})\,d\bar{u}.$$

Проинтегрируем вторую группу уравнений ($k=2$). На основании условия (16) и с целью исключения монотонных изменений α_{32} выберем α_{12} в виде

$$\alpha_{12}=\frac{5}{84}\,\Delta m+\frac{2}{63}\,\ddot{\alpha}\,\dddot{\alpha}.$$

Тогда уравнения (10)—(13) при $k=2$ и их интегралы будут иметь следующий вид (постоянные интегрирования положены равными нулю):

$$\dot{\mu}_2=\frac{8}{21}\,\frac{d}{du}\,(\ddot{\alpha}\,\dddot{\alpha}), \qquad \mu_2=\frac{8}{21}\,\ddot{\alpha}\,\dddot{\alpha},$$

$$-3\dot{\nu}_2=\frac{3}{7}\,\ddot{\alpha}\,\dddot{\alpha}, \qquad \nu_2=-\frac{1}{14}\,\ddot{\alpha}^2,$$

$$4\dot{\alpha}_{32}=\frac{1}{14}\,(\ddot{\alpha}^2+\dot{\alpha}\,\dddot{\alpha}), \qquad \alpha_{32}=\frac{1}{56}\,\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha},$$

$$\dot{\alpha}_{42}=\frac{1}{42}\,(\alpha\,\dddot{\alpha}+\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha}), \qquad \alpha_{42}=\frac{1}{42}\,\alpha\,\ddot{\alpha},$$

$$\dot{\alpha}_{52}=-\frac{3}{140}\,\alpha\,\ddot{\alpha}+\frac{3}{140}\,(2\alpha\,\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}^2), \qquad \alpha_{52}=\frac{3}{140}\,\alpha\,\dot{\alpha},$$

$$\dot{\alpha}_{62}=-\frac{1}{30}\,\alpha\,\dot{\alpha}+\frac{11}{210}\,\alpha\,\dot{\alpha}, \qquad \alpha_{62}=\frac{1}{105}\,\alpha^2,$$

$$\dot{\alpha}_{72}=-\frac{1}{49}\,\alpha^2+\frac{1}{49}\,\alpha^2, \qquad \alpha_{72}=0.$$

При интегрировании третьей группы уравнений ($k=4$) возьмем

$$\alpha_{14}=-\frac{1}{105}\,\Delta m+\frac{1}{4200}\left(\frac{d\,\ddot{\alpha}^2}{d\,u}+\frac{d^3\,\dot{\alpha}^2}{d\,u^3}\right).$$

Тогда

$$\mu_4=\frac{3}{70}\left(\frac{d\ddot{\alpha}^2}{du}+\frac{d^3\dot{\alpha}^2}{du^3}\right), \qquad \nu_4=-\frac{1}{70}\,\frac{d^2\,\dot{\alpha}^2}{du^2}-\frac{1}{35}\,\ddot{\alpha}^2.$$

$$\alpha_{34}=\frac{1}{70}\,\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha}, \qquad \alpha_{44}=\frac{1}{105}\,\alpha\,\ddot{\alpha}+\frac{1}{60}\,\dot{\alpha}^2,$$

$$\alpha_{54}=\frac{19}{1400}\,\alpha\dot{\alpha}, \qquad \alpha_{64}=-\frac{1}{350}\,\alpha^2, \qquad \alpha_{74}=0.$$

Можно, пользуясь найденными α_{sk} и приведенными в приложении значениями $\langle\mu\,\nu\rangle$, с помощью простых алгебраических действий найти коэффициенты (7)—(9) и выписать в явном виде компоненты метрического тензора. Однако мы здесь этого делать не будем. Нас интересуют в первую очередь проблемы сходимости решения, и мы убедились что α_{sk} при $s>k$ — действительно ограниченные функции от u.

Приложение

Рассмотрим электромагнитное излучение в плоском пространстве-времени, пользуясь координатами Бонди $(u, r, \vartheta, \varphi)$. Тогда метрический тензор будет следующим:

$$g_{\mu\nu}=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\vartheta \end{Vmatrix}, \quad g^{\mu\nu}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \end{Vmatrix}.$$

а) Интегрирование уравнений Максвелла в аксиально-симметричном случае. Интеграл уравнений Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right)_{,\,\mu}=0,$$

$$F'_{01}+F_{20,\,r}+\dot{F}_{12}=0$$

можно представить в виде

$$F_{01}=\sum_{s,k}\frac{{}^{(s)}a_{1k}\,(u)\,P_k(\cos\vartheta)}{r^s}\,,\quad F_{02}=\sum_{s,k}\frac{{}^{(s)}a_{2k}\,P_k^{(1)}}{r^s}\,,\quad F_{12}=\sum_{s,k}\frac{{}^{(s)}a_{3k}\,P_k^{(1)}}{r^s}\,,$$

где ${}^{(s)}a_{nk}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} 2(s-1)\,{}^{(s+1)}\dot{a}_{1k}=(k+s-1)\,(k-s+2)\,{}^{(s)}a_{1k}, \\ {}^{(s)}a_{3k}=-\dfrac{(s-1)}{k(k+1)}\,{}^{(s+1)}a_{1k}, \\ {}^{(s)}a_{2k}={}^{(s)}a_{3k}-\dfrac{1}{k(k+1)}\,{}^{(s+2)}\dot{a}_{1k}. \end{cases} \tag{I}$$

Отсюда вытекает ${}^{(1)}a_{1k}={}^{(0)}a_{3k}={}^{(1)}a_{3k}=0,\quad {}^{(2)}\dot{a}_{1k}=-k(k+1)\,{}^{(0)}a_{2k}$. Интеграл системы (I) определяется с точностью до постоянных интегрирования величинами ${}^{(0)}a_{2k}$, а ${}^{(0)}F_{02}$ можно рассматривать как функцию информации электромагнитного поля

$${}^{(0)}F_{02}=\sum_k{}^{(0)}\,\dot{a}_{2k}(u)\,P_k^{(1)}(\cos\vartheta).$$

Коэффициенты a_{nk} пропорциональны производным по u от 2^k-польного момента источника.

б) Тензор энергии-импульса электромагнитного поля $T_{\mu\nu}$.

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\,F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right).$$

Обозначим $<\mu\nu>\overset{\text{опр}}{=}8\pi\,T_{\mu\nu}$.

Тогда имеем

$$<11>=2r^{-2}F_{12}^2,\qquad <22+33>=2r^2F_{01}^2,$$

$$<12>=-2F_{01}F_{12},\qquad <2,00>=2\,{}^{(0)}F_{02}^2,$$

$$<22-33>=2F_{12}(F_{12}-2F_{02}),\qquad <2,02>=2\,{}^{(0)}F_{02}\cdot{}^{(2)}F_{01}.$$

в) Дипольное излучение имеем, когда некоторые ${}^{(s)}a_{n1} \neq 0$, а остальные ${}^{(s)}a_{nk} = 0$. Проинтегрировав уравнения (I), получим ($D(u)$-дипольный момент источника)

$$F_{01} = \left[-\frac{2\dot{D}(u)}{r^2} - \frac{2D(u)}{r^3}\right] P_1(\cos\vartheta),$$

$$F_{02} = \left[\ddot{D}(u) + \frac{\dot{D}(u)}{r} + \frac{D(u)}{r^2}\right] P_1^{(1)}(\cos\vartheta),$$

$$F_{12} = \frac{D(u)}{r^2} P_1^{(1)}(\cos\vartheta),$$

Вычислим $<\mu\nu>$ (они приведены также в работе Ротенберга [4]):

$$<11> = \frac{D^2}{r^6}\left(\frac{4}{3}P_0 - \frac{4}{3}P_2\right),$$

$$<12> = \left(\frac{D\dot{D}}{r^4} + \frac{D^2}{r^6}\right)\frac{4}{3}P_2^{(1)},$$

$$<22-33> = -\left(\frac{2D\ddot{D}}{r^2} + \frac{2D\dot{D}}{r^3} + \frac{D^2}{r^4}\right)\frac{2}{3}P_2^{(2)},$$

$$<22+33> = \left(\frac{\dot{D}^2}{r^2} + \frac{2D\dot{D}}{r^3} + \frac{D^2}{r^4}\right)\left(\frac{8}{3}P_0 + \frac{16}{3}P_2\right),$$

$$<2,00> = \ddot{D}^2\left(\frac{4}{3}P_0 - \frac{4}{3}P_2\right),$$

$$<2,02> = -\frac{4}{3}\dot{D}\ddot{D}P_2^{(1)}.$$

г) Квадрупольное излучение. Проинтегрировав уравнения (I) при $k=2$, получим ($\alpha(u)$-квадрупольный момент источника)

$$F_{01} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{r^2} + \frac{3\dot{\alpha}}{r^3} + \frac{3\alpha}{r^4}\right)P_2,$$

$$F_{02} = -\left(\frac{\dddot{\alpha}}{6} + \frac{\ddot{\alpha}}{2r} + \frac{\dot{\alpha}}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3}\right)P_2^{(1)},$$

$$F_{12} = -\left(\frac{\dot{\alpha}}{2r^2} + \frac{\alpha}{r^3}\right)P_2^{(1)}.$$

$$\alpha = D_{xx} = D_{yy} = -\tfrac{1}{2}D_{zz}.$$

Соответствующие $<\mu\nu>$ имеют следующий вид:

$$<11> = \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2r^6} + \frac{2\alpha\dot{\alpha}}{r^7} + \frac{2\alpha^2}{r^8}\right)\left(\frac{6}{5}P_0 + \frac{6}{7}P_2 - \frac{72}{35}P_4\right),$$

$$<12> = \left(\frac{1}{7}P_2^{(1)} + \frac{9}{35}P_4^{(1)}\right)\left(\frac{\dot{\alpha}\ddot{\alpha}}{r^4} + \frac{2\alpha\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2}{r^5} + \frac{9\alpha\dot{\alpha}}{r^6} + \frac{6\alpha^2}{r^7}\right),$$

$$\langle 22-33\rangle=\left(\tfrac{3}{7}P_2^{(2)}+\tfrac{6}{35}P_4^{(2)}\right)\left(-\frac{\dot{\alpha}\dddot{\alpha}}{3r^2}-\frac{\dot{\alpha}\ddot{\alpha}}{r^3}-\frac{2\alpha\dddot{\alpha}}{3r^3}-\frac{3\dot{\alpha}^2}{2r^4}-\frac{2\alpha\ddot{\alpha}}{r^4}-\frac{4\alpha\dot{\alpha}}{r^5}-\frac{2\alpha^2}{r^6}\right),$$

$$\langle 22+33\rangle=2\left(\tfrac{1}{5}P_0+\tfrac{2}{7}P_2+\tfrac{18}{35}P_4\right)\left(\frac{\ddot{\alpha}^2}{r^2}+\frac{6\dot{\alpha}\ddot{\alpha}}{r^3}+\frac{9\dot{\alpha}^2+6\alpha\ddot{\alpha}}{r^4}+\frac{18\alpha\dot{\alpha}}{r^5}+\frac{9\alpha^2}{r^6}\right),$$

$$\langle 2,00\rangle=\frac{\dddot{\alpha}^2}{18}\left(\tfrac{6}{5}P_0+\tfrac{6}{7}P_2-\tfrac{72}{35}P_4\right),$$

$$\langle 2,02\rangle=-\tfrac{1}{3}\ddot{\alpha}\,\dddot{\alpha}\left(\tfrac{1}{7}P_2^{(1)}+\tfrac{9}{35}P_4^{(1)}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Унт В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем. **17**, № 2, 164 (1968).
2. Bondi H., Van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K., Proc. Roy. Soc., **269**, 21 (1962).
3. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, «Наука», 1967.
4. Rotenberg M. A., Proc. Roy. Soc., **293**, 408 (1966).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/III 1968

V. UNT

AKSIAALSÜMMEETRILINE ELEKTROMAGNETILINE KIIRGUS ÜLDISES RELATIIVSUSTEOORIAS ESIMESES LÄHENDUSES

Artiklis integreeritakse Einsteini võrrandid esimeses lähenduses aksiaalsümmeetrilise elektromagnetilise kiirguse olemasolu korral. Näidatakse, et lahendi koonduvuse tingimused (16) tähendavad füüsikaliselt kiirte kõrvalekaldumist elektromagnetilise massi gravitatsiooniväljas. Üksikasjalisemalt vaadeldakse elektromagnetilist diipol- ja kvadrupolkiirgust.

V. UNT

AXI-SYMMETRIC ELECTROMAGNETIC RADIATION IN GENERAL RELATIVITY IN THE FIRST APPROXIMATION

In this paper the integration of the Einstein equations in the first approximation (when electromagnetic radiation is present) has been reduced to simple algebraic operations and to the integration of the ordinary differential equations (10)—(13). It has been shown that the mass loss of the source is described by the real mass only in the case when the convergence conditions (16) are satisfied. Physically speaking, these conditions represent a deflection of rays in the gravitational field of the mass transported by electromagnetic waves. The equations (10)—(13) have been integrated in the cases of the electromagnetic dipole and quadrupole radiation.