EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.3.05

Л. АЙНОЛА

К ВАРИАЦИОННЫМ ПРИНЦИПАМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Проводится преобразование Лежандра вариационного принципа, эквивалентного уравнениям и соотношениям, а также граничным и начальным условиям линейной теории типа Тимошенко для упругих оболочек, и выводится вариационный принцип, являющийся аналогом принципа Кастильяно в статике оболочек. Показывается, что этот принцип эквивалентен уравнениям движения, а также граничным и начальным условиям теории оболочек, сформулированным только с помощью усилий и моментов.

1. Введение

Для динамических задач теории оболочек, как и для динамических задач вообще, до последнего времени широко применялась только вариационная формулировка в виде вариационного принципа Гамильтона—Остроградского. Принцип этот применим, если задачи динамики сформулированы как задачи с граничными условиями по времени, т. е. если заданы начальные и конечные условия исследуемой системы. Недавно было выяснено, что и динамические задачи с начальными условиями могут быть представлены в виде вариационных задач [1, 2]. Такая возможность имеет принципиальное значение, так как динамические задачи прикладной механики почти всегда заданы как задачи с начальными условиями, а конечные условия системы неизвестны.

Основное отличие вариационного принципа для задач с начальными условиями от принципа Гамильтона—Остроградского заключается в том, что соответствующий функционал составляется вместо обычного интеграла с помощью интеграла-свертки по времени. Применительно к теории оболочек такая вариационная формулировка была приведена в работах [3, 4].

В статике упругого тела, в том числе и упругих оболочек, известен ряд вариационных принципов. Основные из них: 1) принцип Лагранжа, сформулированный в перемещениях, 2) принцип Геллингера—Рейсснера — в перемещениях и напряжениях, 3) принцип Ху—Вашизу — в перемещениях, напряжениях и деформациях и 4) принцип Кастильяно — в напряжениях. Все эти принципы эквивалентны в том смысле, что они выводятся один из другого с помощью классических методов преобразования вариационных задач.

В виде различных модификаций принципа Гамильтона—Остроградского упомянутые возможности формулировки вариационного принципа рассмотрены как для теории упругости [5–9], так и для теории оболочек [10–13]. Принцип, аналогичный принципу Кастильяно, представляющий собой модификацию принципа Гамильтона—Остроградского, исследован для систем с конечным числом степеней свободы в работах [14–18]. Соответствующий вариационный принцип для колебаний упругих тел выведен в [19–25].

Представляет интерес вывести соответствующие вариационные принципы и для динамических задач теории оболочек, исходя из вариационного принципа для задач с начальными условиями. Для теории типа Тимошенко для упругих оболочек такие вариационные принципы, соответствующие принципам Лагранжа, Геллингера—Рейсснера и Ху—Вашизу, предложены раньше [3, 4]. Ниже выводится для теории типа Тимошенко вариационный принцип, являющийся аналогом принципа Кастильяно. Тем самым устанавливается полное соответствие между вариационными принципами теории оболочек в динамике и статике.

2. Основные уравнения и исходный вариационный принцип

Рассмотрим линейную теорию типа Тимошенко упругих оболочек [13]. Для краткости изложения используем при выписке уравнений и соотношений этой теории матричные обозначения.

Введем матрицы

$$\tilde{v} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{v} \\ w \\ \varphi \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{\vartheta} = \left\| \begin{matrix} \vartheta \\ \lambda \\ \psi \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{\Theta} = \left\| \begin{matrix} \Theta \\ \Lambda \\ \Psi \end{matrix} \right\|,$$

$$\tilde{\varepsilon} = \left\| \begin{matrix} \varepsilon \\ \omega \\ \varkappa \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{T} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{matrix} \right\| \tag{2.1}$$

и назовем их матрицами перемещений, скоростей перемещений, импульсов, деформации и усилий. Элементами этих матриц являются: $\mathbf{v}$ — вектор тангенциальных перемещений, w — нормальное перемещение, φ — вектор углов поворота нормали, ϑ, λ, ψ — соответствующие им скорости, Θ, Λ, Ψ — соответствующие им импульсы; ε, $\varkappa$ — тензоры деформации, ω — кинематический вектор; $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$ — тензоры тангенциальных сил и моментов, $\mathbf{N}$ — вектор поперечных сил.

Пусть

$$\tilde{\nabla} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2}[\nabla + (\nabla)^*] & -\mathbf{b} & 0 \\ \mathbf{b} & \nabla & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}[\nabla + (\nabla)^*] \end{matrix} \right\|. \tag{2.2}$$

Здесь ∇ — векторный оператор набла, причем $(\nabla)^* \alpha = \alpha \nabla$; $\mathbf{b}$ — тензор второй квадратичной формы срединной поверхности и $\mathbf{I} = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ — единичный тензор.

Обозначим производные по времени

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \tilde{v}\cdot. \tag{2.3}$$

Кинематические соотношения рассматриваемой теории типа Тимошенко можно с помощью обозначений (2.1)—(2.3) представить в виде

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\nabla}\, \tilde{v}, \qquad \tilde{\vartheta} = \tilde{v}^{\cdot}. \tag{2.4}$$

Пусть далее

$$\tilde{E} = \begin{Vmatrix} B\mathbf{E}: & 0 & 0 \\ 0 & G\mathbf{I}\cdot & 0 \\ 0 & 0 & D\mathbf{E}: \end{Vmatrix} = \{B\mathbf{E}:,\quad G\mathbf{I}\cdot,\quad D\mathbf{E}:\},$$

$$\tilde{E}^{-1} = \{B'\,\mathbf{P}:,\quad G^{-1}\,\mathbf{I}\cdot,\quad D'\mathbf{P}:\},$$

$$\tilde{\varrho} = \{\varrho h,\quad \varrho h,\quad \varrho h^3/12\}, \tag{2.5}$$

$$\tilde{\varrho}^{-1} = \{1/\varrho h,\quad 1/\varrho h,\quad 12/\varrho h^3\},$$

где

$$\mathbf{E} = (1-\nu)\,\mathbf{r}^{\alpha}\mathbf{r}_{\beta}\,\mathbf{r}^{\beta}\,\mathbf{r}_{\alpha} + \nu\mathbf{r}^{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha}\mathbf{r}^{\beta}\mathbf{r}_{\beta},$$

$$\mathbf{P} = (1+\nu)\,\mathbf{r}^{\alpha}\mathbf{r}_{\beta}\,\mathbf{r}^{\beta}\,\mathbf{r}_{\alpha} - \nu\mathbf{r}^{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha}\mathbf{r}^{\beta}\mathbf{r}_{\beta},$$

$$B = Eh/(1-\nu^2), \qquad G = Eh/2k(1+\nu), \qquad D = Eh^3/12(1-\nu^2),$$

$$B' = 1/Eh, \qquad D' = 12/Eh^3. \tag{2.6}$$

Здесь ϱ — плотность материала оболочки; h — толщина оболочки; k — коэффициент сдвига.

С учетом обозначения (2.5), соотношения упругости будут иметь вид

$$\tilde{T} = \tilde{E}\,\tilde{\varepsilon}, \qquad \tilde{\Theta} = \tilde{\varrho}\,\tilde{\vartheta}, \tag{2.7}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{E}^{-1}\,\tilde{T}, \qquad \tilde{\vartheta} = \tilde{\varrho}^{-1}\,\tilde{\Theta}. \tag{2.8}$$

Введем еще матрицы

$$\tilde{\nabla}^{*} = \begin{Vmatrix} \nabla\cdot & -\mathbf{b}\cdot & 0 \\ \mathbf{b}\cdot & \nabla & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}\cdot & \nabla\cdot \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{p} = \begin{Vmatrix} \mathbf{p} \\ p \\ \mathbf{m} \end{Vmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{Vmatrix} \mathbf{P} \\ P \\ \mathbf{K} \end{Vmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{Vmatrix} \mathbf{W} \\ W \\ \mathbf{\Phi} \end{Vmatrix}, \tag{2.9}$$

$$\tilde{n} = \{\mathbf{n}\cdot,\ \mathbf{n}\cdot,\ \mathbf{n}\cdot\}.$$

Здесь $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}$ — векторы тангенциальной и моментной нагрузки; p — нормальная нагрузка; $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$ — векторы внешних усилий и моментов на части контура C_1; P — поперечные усилия на C_1; $\mathbf{W}$, $\mathbf{\Phi}$ — заданные векторы тангенциальных перемещений и углов поворота на части контура C_2; W — заданные нормальные перемещения на C_2; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали контура оболочки.

Уравнения движения оболочки во введенных обозначениях имеют вид

$$\tilde{\nabla}^{*}\,\tilde{T} - \tilde{\Theta}^{\cdot} + \tilde{p} = 0. \tag{2.10}$$

Присоединим к уравнениям и соотношениям (2.4), (2.7), (2.10) следующие граничные и начальные условия:

$$\tilde{n}\tilde{T}=\tilde{P} \qquad \text{на } C_1, \tag{2.11}$$

$$\tilde{v}=\tilde{W} \qquad \text{на } C_2, \tag{2.12}$$

$$\tilde{v}(x^\gamma,0)=\tilde{v}_0, \qquad \tilde{\Theta}(x^\gamma,0)=\tilde{\Theta}_0, \tag{2.13}$$

где $\tilde{v}_0$, $\tilde{\Theta}_0$ — заданные матрицы перемещений и импульсов в начале движения при $t=0$.

В дальнейшем широко используем следующее обозначение для интегралов-сверток, образованное с помощью умножения транспонированной матрицы $\tilde{\alpha}'$ и матрицы $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\alpha}'=\|\alpha,a,A\|,\ \tilde{\beta}=\left\|\begin{matrix}\beta\\ b\\ B\end{matrix}\right\|, \tag{2.14}$$

$$\tilde{\alpha}\ast\tilde{\beta}=\int\limits_0^\tau[\alpha(x^\gamma,\tau-t):\beta(x^\gamma,t)+a(x^\gamma,\tau-t)\cdot b(x^\gamma t)+$$

$$+A(x^\gamma,\tau-t)\,B(x^\gamma,t)]dt.$$

Уравнения и соотношения (2.4), (2.7), (2.10), граничные условия (2.11), (2.12) и начальные условия (2.13) могут быть сформулированы в виде полного вариационного принципа нахождения стационарного значения функционала [4]:

$$I=\int\limits_S\{-{}^1\!/_2\,\tilde{\varepsilon}\ast\tilde{E}\tilde{\varepsilon}+\tilde{T}\ast(\tilde{\varepsilon}-\tilde{\nabla}\tilde{v})-{}^1\!/_2\tilde{\varrho}\,\tilde{\vartheta}\ast\tilde{\vartheta}+$$

$$+\tilde{\Theta}\ast(\tilde{\vartheta}-\tilde{v}^{\cdot})+\tilde{p}\ast\tilde{v}+\tilde{\Theta}_0'\tilde{v}(x^\gamma,\tau)-\tilde{\Theta}'(x^\gamma,\tau)[\tilde{v}(x^\gamma,0)-\tilde{v}_0]\}\,dS+$$

$$+\int\limits_{C_1}\tilde{P}\ast\tilde{v}\,dC+\int\limits_{C_2}\tilde{n}\tilde{T}\ast(\tilde{v}-\tilde{W})\,dC. \tag{2.15}$$

Здесь варьированию подлежат элементы матриц $\tilde{v}$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\Theta}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{T}$.

Этот полный вариационный принцип является аналогом принципа Ху—Вашизу для случая динамической теории оболочек.

3. Вариационный принцип Кастильяно

Чтобы вывести для динамической теории оболочек вариационный принцип, соответствующий принципу Кастильяно, надо в полном вариационном принципе удовлетворить предварительно определенные группы условий стационарности. К таким условиям относятся уравнения движения (2.10), соотношения упругости (2.7), статические граничные условия (2.11) и начальные условия относительно импульсов (2.13_2).

Исключая с помощью названных соотношений из функционала (2.15) варьируемые элементы матриц $\tilde{v}$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\varepsilon}$, получаем функционал

$$I_1 = \int\limits_S [{}^1/_2 \tilde{T} \times \tilde{E}^{-1} \tilde{T} + {}^1/_2 \tilde{\varrho}^{-1} \tilde{\Theta} \times \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}'(x^{\gamma}, \tau) \tilde{v}_0] \, dS - $$

$$- \int\limits_{C_2} \tilde{n}\tilde{T} \times \tilde{W} dC. \qquad (3.1)$$

В функционале (3.1) варьируемыми величинами являются элементы матриц $\tilde{T}, \tilde{\Theta}$, причем они должны удовлетворять условиям (2.10), (2.11) и (2.13_2). Условиями стационарности функционала (3.1) будут кинематические соотношения (2.4), геометрические граничные условия (2.12) и начальные условия (2.13_1).

Исключаем элементы матрицы $\tilde{\Theta}$ из функционала (3.1). Сперва отметим, что величина τ — значение времени в конце рассматриваемого интервала — входит как параметр в этот функционал, причем первая вариация функционала равняется нулю при выполнении условий (2.4), (2.12), (2.13_1) в случае его любого значения, т. е.

$$\delta I_1(\tau) = 0. \qquad (3.2)$$

Это обстоятельство позволяет преобразовать функционал путем дифференцирования или интегрирования его по параметру τ. Учитывая, что

$$\frac{d}{d\tau} \delta I_1(\tau) = \delta \frac{dI_1}{d\tau}, \qquad (3.3)$$

после двукратного дифференцирования соотношения (3.2) имеем

$$\delta \frac{d^2 I_1}{d\tau^2} = 0. \qquad (3.4)$$

Наоборот, если считать, что условие (3.4) выполнено, имеем

$$\delta [I_1(\tau) + A\tau + B] = 0, \qquad (3.5)$$

где A и B не зависят от τ. Из выражения (3.1) для функционала I_1 видно, что I_1 может быть линейной функцией от τ только тогда, когда элементы матриц $\tilde{T}$, $\tilde{\Theta}$ не зависят от времени t, т. е. в случае статики. Поэтому, исходя из предположения, что все рассматриваемые величины зависят от времени, вариационные принципы (3.2) и (3.4) можно считать эквивалентными.

Отметим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} (\tilde{\alpha} \times \tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}^{\cdot} \times \tilde{\beta}^{\cdot} + \tilde{\alpha}'(x^{\gamma}, 0) \tilde{\beta}^{\cdot}(x^{\gamma}, \tau) + \tilde{\beta}'(x^{\gamma}, 0) \tilde{\alpha}^{\cdot}(x^{\gamma}, \tau), \qquad (3.6)$$

и проведем двукратное дифференцирование функционала (3.1). Имеем

$$\frac{d^2 I_1}{d\tau^2} = \int\limits_S [{}^1/_2 \tilde{T}^{\cdot} \times \tilde{E}^{-1} \tilde{T}^{\cdot} + {}^1/_2 \tilde{\varrho}^{-1} \tilde{\Theta}^{\cdot} \times \tilde{\Theta}^{\cdot} + \tilde{T}'(x^{\gamma}, 0) \tilde{E}^{-1} \tilde{T}^{\cdot}(x^{\gamma}, \tau) + $$

$$+ \tilde{\varrho}^{-1} \tilde{\Theta}'(x^{\gamma}, 0) \tilde{\Theta}^{\cdot}(x^{\gamma}, \tau) + \tilde{\Theta}^{\cdot\prime\prime}(x^{\gamma}, \tau) \tilde{v}_0] \, dS - \int\limits_{C_2} \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \tilde{n}\tilde{T} \times \tilde{W} dC. \qquad (3.7)$$

Функционал (3.7) содержит только производные по времени элементов матрицы $\tilde{\Theta}$ или их значения при $t=0$. Но эти величины явно можно найти с помощью дополнительных условий (2.10), (2.13$_2$) и исключить из функционала.

Пренебрегая членами, содержащими только заданные величины, и используя формулу Остроградского, имеем

$$I_2=\int\limits_S \{{}^1/_2\tilde{T}^{\cdot}\times\tilde{E}^{-1}\tilde{T}^{\cdot}+{}^1/_2\tilde{\varrho}^{-1}\tilde{\nabla}^*\tilde{T}\times\tilde{\nabla}^*\tilde{T}+\tilde{\varrho}^{-1}\tilde{p}\times\tilde{\nabla}^*\tilde{T}+$$

$$+\tilde{T}'(x^\gamma,0)\tilde{E}^{-1}\tilde{T}^{\cdot}(x^\gamma,\tau)-\tilde{\varrho}^{-1}\tilde{\nabla}\tilde{\Theta}_0\tilde{T}'(x^\gamma,\tau)-\tilde{\nabla}\tilde{v}_0\tilde{T}''(x^\gamma,\tau)\}\,dS-$$

$$-\int\limits_{C_2}\tilde{n}\tilde{T}^{\cdot}\times\tilde{W}^{\cdot\prime}\,dC+\int\limits_{C_1}\{(\tilde{\varrho}^{-1}\tilde{\Theta}_0)'\tilde{n}\tilde{T}(x^\gamma,\tau)+\tilde{v}_0'\tilde{n}\tilde{T}(x^\gamma,\tau)\}\,dC. \tag{3.8}$$

В функционале (3.8) варьируемыми величинами являются только элементы матрицы $\tilde{T}$, которые предварительно должны удовлетворять статическим граничным условиям (2.11).

Итак, в случае динамической теории оболочек принцип Кастильяно приводит к нахождению стационарного значения функционала (3.8).

Условиями стационарности функционала (3.8) являются:
уравнения движения

$$\tilde{E}^{-1}\tilde{T}^{\cdot\cdot}-\tilde{\varrho}^{-1}\tilde{\nabla}\tilde{\nabla}^*\tilde{T}-\tilde{\varrho}^{-1}\tilde{\nabla}\tilde{p}=0, \tag{3.9}$$

граничные условия на C_2

$$\tilde{\nabla}^*\tilde{T}+\tilde{p}-\tilde{W}^{\cdot\cdot}=0 \tag{3.10}$$

и начальные условия

$$\tilde{E}^{-1}\tilde{T}^{\cdot}(x^\gamma,0)-\tilde{\varrho}^{-1}\tilde{\nabla}\tilde{\Theta}_0=0,$$

$$\tilde{E}^{-1}\tilde{T}(x^\gamma,0)-\tilde{\nabla}\tilde{v}_0=0. \tag{3.11}$$

Уравнения (3.9), граничные условия (2.11), (3.10) и начальные условия (3.11) являются формулировкой динамической теории упругих оболочек в усилиях и моментах [26]. Эта система заменяет систему уравнений Бельтрами—Митчелла в случае динамической теории оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gurtin M. E., Arch. Rational Mech. and Analysis, **16**, № 1, 34 (1964).
2. Айнола Л. Я., Докл. АН СССР, **172**, № 2, 306 (1967).
3. Айнола Л. Я., Вариационные принципы и теоремы взаимности для динамических задач теории оболочек, Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку, 1966, «Наука», 1966.
4. Айнола Л. Я., Докл. АН СССР, **172**, № 6, 1296 (1967).
5. Айнола Л., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, **10**, № 1, 22 (1961).
6. Chen Y., J. Franklin Inst., **278**, No. 1, 1 (1964).

7. Yu Y. Y., J. Acoust. Soc. Am. **36**, No. 1, 111 (1964).
8. Ben-Amoz M., Quart. Appl. Math., **24**, No. 1, 82 (1966).
9. Barr A. D. S., J. Appl. Mech., **33**, No. 2, 465 (1966).
10. Yu Y. Y., J. Franklin Inst., **280**, No. 5, 395 (1965).
11. Habip L. M., Ing. Arch., **34**, No. 4, 228 (1965).
12. Klingbeil E., Ing. Arch., **34**, No. 2, 80 (1965).
13. Айнола Л., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 3, 337 (1965).
14. Toupin R. A., Trans. ASME, **74**, 151 (1952).
15. Crandall S. H., Complementary extremum principles for dynamics, Ninth International Congress of Applied Mechanics, Brussels, 1956.
16. De Veubeke F. B., Ann. Soc. scient. Bruxelles, **73**, No. 3, 327 (1959).
17. Karnopp B. H., J. Franklin Inst., **284**, No. 1, 56 (1967).
18. Seely S., Goldstein M. H. Jr., J. Franklin Inst., **283**, No. 3, 187 (1967).
19. Grammel R., Ing. Arch., **10**, No. 1, 35 (1939).
20. Reissner E., J. Math. and Phys., **27**, No. 2, 159 (1948).
21. Hu H. C., Chin. J. Mech., **1**, No. 2, 169 (1957).
22. Чкуасели А. Г., Изв. высш. уч. зав., Строит. и архит., № 3, 19 (1960).
23. Washizu R., Internat. J. Solids and Struct., **2**, No. 1, 27 (1966).
24. Karnopp B. H., Z. angew. Math. u. Phys., **18**, Nr. 4, 575 (1967).
25. Tabarrok B., Karnopp B. H., Z. angew. Math. u. Phys., **18**, Nr. 4, 580 (1967).
26. Айнола Л., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, № 4, 463 (1967).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/II 1968

L. AINOLA

KOORIKUTE DÜNAAMIKA TEOORIA VARIATSIOONPRINTSIIPIDEST

Lähtutakse elastsete koorikute Timoshenko-tüüpi lineaarse teooria võrranditele ning ääre- ja algtingimustele ekvivalentsest variatsioonprintsiibist. Teostatakse vastava variatsioonülesande Legendre'i teisendus ja tuletatakse variatsioonprintsiip, mis on analoogiline Castigliano printsiibile koorikute staatika teoorias. Näidatakse, et saadud printsiip on ekvivalentne jõududes ja momentides formuleeritud kooriku liikumisvõrranditele ning ääre- ja algtingimustele.

L. AINOLA

ON VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE DYNAMICAL THEORY OF SHELLS

The author proceeds from the variational principle which is equivalent to the equations and also to the boundary and initial conditions of the Timoshenko type linear theory of elastic shells. The Legendre transformation of the corresponding variational problem is carried out, and the variational principle responding to Castigliano's principle in the static theory of shells is derived. It is shown that this transformed principle is equivalent to the equations of motion and boundary and initial conditions which are formulated only in stress and couple resultants.