EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.3.04

И. КЕЙС

К ОПТИМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СВОБОДНОГО ГИРОСТАТА

Сообщение второе

Вопросу активной стабилизации некоторых частных вращений твердого тела и гиростата относительно одной точки посвящены, в частности, работы М. Атэнса [1], К. С. Кумара [2], К. Хаяси [3], И. Иословича [4, 5], М. Борщевского [5], Т. Летовой [6] и В. Крементуло [7], которые различаются по постановке, методам, цели (критериям оптимальности), а также по глобально-[1–6] локальному [7] характеру.

В этих исследованиях рассматриваются симметричные [3–6] и несимметричные [1, 2, 6, 7] объекты, обследуется стабилизация части динамических переменных [1–7]. Проблематично утверждение о «малых поворотах» в статье [5], допускающее «большое» время переходного процесса, в течение которого силы диссипации, аналогично известной теореме Н. Е. Жуковского о пассивной стабилизации равномерного вращения твердого тела, вероятно, образуют пассивный регулятор относительно намеченной цели. Возражение вызывает применение авторами работы [2] статической зависимости между относительным моментом количества движений и моментом от электродвигателя, в которой, в частности, дается некорректное определение расхода энергии. В большинстве отмеченных работ [2, 6, 7] применяется метод Беллмана—Летова, успех действия которого для стабилизации части переменных, по-видимому, связан с возможностью использования метода стабилизации Атэнса [1], причем последний, по всей вероятности, предпочтительнее первого, так как применяется, в отличие от работ [2, 6, 7], для построения не идеального регулятора, а норм-ограниченного. Работы [4, 5], основывающиеся на теории В. Ф. Кротова и результатах Гурмана, по методу несомненно предпочтительнее работы [3], связанной с возможностью существования скользящих режимов, хотя эти работы и различаются постановкой исследуемой задачи.

В отличие от предыдущего сообщения, основывающегося на методе построения идеального регулятора оптимальной асимптотической стабилизации по части переменных в локальной постановке, здесь предлагается решение ряда задач глобальной оптимальной (относительно серии критериев) стабилизации части переменных для некоторых вращений (относительно центра) свободных гиростатов.

Согласно методу Атэнса, распространенному здесь на задачу о стабилизации части переменных, решаются задачи оптимального синтеза при соответствующих ограничениях. Серию критериев оптимальности образуют время переходного процесса, функционалы типа затрат топлива и энергии, а также некоторая их модификация, хотя серию можно и продолжить, следуя замечанию Кипиниака [8].

Постановка задачи

1. Исследуются обыкновенные дифференциальные уравнения движения гиростата вокруг центра масс известного [9] типа

$$dK/dt + [\Omega, K] = 3\,\omega_0^2[\mathrm{grad}_\sigma \Phi, \sigma] + u, \tag{1.0}$$

$$dk/dt + dg(\Omega)/dt = v, \tag{1.1}$$

$$d\sigma/dt = [\sigma, \Omega - \omega_0 \beta], \tag{1.2}$$

$$d\beta/dt = [\beta, \Omega], \tag{1.3}$$

$$g = \begin{Vmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

для отклонений $\overline{K} = K - K^*$, $\overline{\Omega} = \Omega - \Omega^*$, $\overline{k} = k - k^*$, $\overline{\sigma} = \sigma - \sigma^*$, $\overline{\beta} = \beta - \beta^*$ относительно ряда частных движений K^*, Ω^*, k^*, σ^*, β^*, допускаемых системой (1.0)—(1.3) при $u \equiv v \equiv 0$, с целью оптимальной в смысле минимизации функционалов $I_i = \int\limits_0^{\alpha_i} F_i\, dt\, (i = \overline{1,3})$ $(F_1 = 1,\ F_2 = \Gamma_2 \|w\|,\ F_3 = 0{,}5\,\Gamma_3 \|w\|^2,\ \|w\|^2$ — положительно определенная форма всех или части управлений u, v; $\alpha_1 = t,\ \alpha_2 = \alpha_3 = T = \text{const},\ \Gamma_2 = \text{const},\ \Gamma_3 = \text{const})$ стабилизации части переменных $\overline{K} \to \overline{\beta}$, в случае, когда управления u, v подчинены норм-ограничению $\|w\| \leqslant M$, $M = \text{const}$. Рассмотрение проводится, вообще говоря, для несимметричных гиростатов.

Метод решения

2. Поскольку при решении поставленных задач применяется способ Атэнса, основанный на неравенствах Шварца, приводим некоторые сведения и результаты работы [1].

Пусть рассматриваемая система уравнений, линейно зависящая от управлений w_i, допускает векторную запись

$$d\overline{\xi}/dt = \overline{g}[\overline{\xi}(t), t] + \overline{w}, \tag{2.1}$$

в которой $\overline{\xi}$, $\overline{g}$, $\overline{w}$ суть n-мерные векторы, обладает при $\overline{w} \equiv 0$ интегралом $\|\xi(t)\| = \|\xi(0)\|$, т. е. относится к числу норм-инвариантных систем. Если вектор управлений w принадлежит области, ограниченной замкнутой сферой $\|w\| \leqslant M$, то можно осуществить глобальную (при любых $\|\xi(0)\| < +\infty$) стабилизацию, минимальную относительно критериев затрат времени, «топлива» и «энергии»:

$$\int\limits_0^t 1 \cdot dt; \qquad \Gamma_2 \int\limits_0^T \|w\| dt; \qquad 0{,}5\,\Gamma_3 \int\limits_0^T \|w\|^2 dt, \qquad (2.2), (2.3), (2.4)$$

применив соответственно управления $\overline{w}_i = - V_{(i)} \overline{\xi} \|\overline{\xi}\|^{-1}$ $(V_1 = V_2 = M,$ $V_3 = \|\xi(0)\| T^{-1})$. Возможна иная форма для уравнений (2.1), где вместо w выбран член Hw, если $H^T = H^{-1}$ и ранг матрицы $H = n$, как отмечено в [8]. Уравнения (1.0), (1.1), (1.2), (1.3) для отклонений $\overline{K} \to \overline{\beta}$, вообще говоря, не обладают свойством уравнений (2.1) в отношении размерности вектора w, причем это обстоятельство сохраняется после невырожденных линейных преобразований относительно составляющих вектора ξ для системы уравнений (1.0), (1.1), (1.2), (1.3). Однако для части координат, образующих некоторый «вполне управляемый» вектор $\overline{\eta}$, используя имеющиеся у рассматриваемой системы интегралы, можно получить векторное уравнение

$$d\bar{\eta}/dt = g[\bar{\eta}, \zeta(t), t] + \bar{w}^*, \tag{2.5}$$

в котором нестабилизируемые координаты ζ — некоторые функции времени, определяемые опущенными здесь уравнениями, — соответствуют аргументу t уравнения (2.1).

3. Рассмотрим уравнения движения свободного гиростата, получаемые из системы (1.0), (1.1), (1.2), (1.3) подстановкой $\omega_0 = 0$, которые допускают при $u = v = 0$ интегралы

$$\varphi_1 = \|K\|^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = \mathrm{const}, \tag{3.1}$$

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{3} [G_i^{-1} K_i^2 + (G_i - g_i)(G_i g_i)^{-1} k_i^2] = \mathrm{const}. \tag{3.2}$$

$$\zeta_i = \nu_{(i)}^{-1}(\lambda)\,[\varepsilon_{(i)} K_{(i)} + (1 - \varepsilon_{(i)})\,k_{(i)}] = \mathrm{const}. \tag{3.3}$$

Здесь $i = \overline{1, 3}$; $\nu_{(i)}^2 = \varepsilon_{(i)}^2 (\lambda + G_{(i)}^{-1})^{-1} + (1 - \varepsilon_{(i)})^2 g_{(i)} G_{(i)} (G_{(i)} - g_{(i)})^{-1}$; $\varepsilon_i = g_{(i)}/G_{(i)}$; по индексу (i) нет суммирования; $\lambda = \mathrm{const} \geqslant -|\max G_i|^{-1}$. Тогда связка интегралов $\varphi(\lambda) = \lambda\varphi_1 + \varphi_2$ в новых переменных $x_i = (\lambda + G_{(i)}^{-1})^{1/2} K_{(i)}$, $y_i = (G_{(i)} - g_{(i)})^{1/2} (G_{(i)} g_{(i)})^{-1/2} k_{(i)}$ примет вид эвклидовой нормы вектора $\{x, y\}$. Осуществим поворот в этом пространстве, согласно формулам перехода, к другим новым фазовым переменным

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \alpha_{(i)} x_{(i)} + \beta_{(i)} y_{(i)}, \\ \eta_i &= -\beta_{(i)} x_{(i)} + \alpha_{(i)} y_{(i)}, \\ \alpha_i &= \nu_{(i)}^{-1}(\lambda)\,\varepsilon_{(i)} (\lambda + G_{(i)}^{-1})^{-1/2}, \\ \beta_i &= \nu_{(i)}^{-1}(\lambda)\,(1 - \varepsilon_{(i)})\,(g_{(i)} G_{(i)})^{1/2} (G_{(i)} - g_{(i)})^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

в которых связка $\varphi(\lambda)$ примет вид

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \eta_i^2 + \sum_{i=1}^{3} \zeta_i^2.$$

Ввиду соотношений (3.1), (3.2), (3.3) выражение $\varphi(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, равное

$$\sum_{i=1}^{3} \eta_i^2 + (1 + \lambda_1)\zeta_1^2 + (1 + \lambda_2)\zeta_2^2 + (1 + \lambda_3)\zeta_3^2, \tag{3.5}$$

при $\lambda_i > -1$ является положительно определенной формой переменных ζ, η, а также интегралом рассматриваемых уравнений при $u = v = 0$. Произведем конечное преобразование, приняв следующие равенства для финальных переменных ϑ, η':

$$\vartheta_i = (1 + \lambda_{(i)})^{1/2} \zeta_{(i)},$$

$$\eta_i' = \eta_i,$$

для которых получим уравнения типа (2.1) и (2.5):

$$d\vartheta_i/dt = f_i(\vartheta, \eta') + u_i', \tag{3.6}$$

$$d\eta_i'/dt = f_{3+i}(\vartheta, \eta') + v_i', \tag{3.7}$$

обладающие интегралом квадрата нормы вектора, $\{\vartheta, \eta'\}$, согласно выражению (3,5), именно:

$$\|\{\vartheta, \eta'\}\|^2 = \varphi(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Big(\sum_{i=1}^{3} \eta_i^2 + \sum_{i=1}^{3} \vartheta_i^2\Big)_{u=v=0} = \text{const},$$

где

$$u_i' = \nu_{(i)}^{-1} (1 + \lambda_{(i)})^{1/2} v_{(i)}, \tag{3.8}$$

$$v_i' = \nu_{(i)}^{-1} (\lambda + G_{(i)}^{-1})^{-1/2} (G_{(i)} - g_{(i)})^{1/2} (g_{(i)} G_{(i)})^{-1/2} (1 - \varepsilon_{(i)})^{-1} [\varepsilon_{(i)} v_{(i)} - \\ - \nu_{(i)}^2 (\lambda + G_{(i)}^{-1}) u_{(i)}]. \tag{3.9}$$

Предположим, что множество допустимых управлений в рассматриваемой задаче определяется следующим ограничением на квадратичную форму $\sum_{i=1}^{3} u_i'^2 + \sum_{i=1}^{3} v_i'^2 = q_2(u, v) \leqslant M^2$, получаемую, согласно (3.8) и (3.9) в виде

$$q_2 = \sum_{i=1}^{3} \nu_{(i)}^{-2} \{[1 + \lambda_{(i)} + g_{(i)} (G_{(i)} - g_{(i)})^{-1} (G_{(i)} \lambda + 1)^{-1}] v_{(i)}^2 - 2\nu_{(i)}^2 (G_{(i)} - \\ - g_{(i)})^{-1} u_{(i)} v_{(i)} + \nu_{(i)}^4 (G_{(i)} \lambda + 1)^{-1} g_{(i)} (G_{(i)} - g_{(i)})^{-1} u_i^2\}. \tag{3.10}$$

Принимая теперь $\{u', v'\}$ в качестве вектора w, а $\{\vartheta, \eta'\}$ за вектор ξ, можно легко получить выражения для соответствующих всем критериям оптимальности (2.2), (2.3), (2.4) регуляторов $\overline{w}_{(i)}$, обеспечивающих, ввиду невырожденности преобразований переменных K, k в ϑ, η', полную стабилизацию по K, k.

Множество, ограниченное формой $q_2(u, v) \leqslant M^2$, зависит от параметров λ, λ_1, λ_2, λ_3, и, применяя критерий Сильвестра к выражению (3.10), нетрудно убедиться, что оно ограничено эллипсоидом в пространстве переменных и центром в нуле. Допустим далее, что $\lambda = -|\max G_i|^{-1}$, тогда в форме φ исчезает переменная K_i (скажем, K_1), уравнение для которой следует выделить из группы шести дифференциальных уравнений для K и k, а вместо переменной k_1 рассмотрим количество y_1. Для переменных K_2, K_3, k_2, k_3 произведем использованные ранее преобразования, в результате которых форма $\varphi(\lambda)$ получит следующее выражение:

$$\varphi(\lambda) = y_1^2 + \sum_{i=1}^{2} (\zeta_i^2 + \eta_i^2).$$

Предполагая, что нет необходимости гасить отклонение K_1, отказываемся от составляющей реактивного момента управления u_1, добившись, аналогично предыдущему, оптимальной стабилизации отклонений

K_2, K_3, k_1, k_2, k_3. Ограничение на управление отличается от приводимого выражения (3.10) лишь первым слагаемым, которое здесь равно значению $g_1^{-1}(1-\varepsilon_1)v_1^2$, так что допустимая область управления ограничена эллипсоидом в пространстве u_2, u_3, v_1, v_2, v_3.

Следует подчеркнуть, что в характере связки $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda)$ не учитывается одна остающаяся возможность, когда член φ_2 не входит в нее. В этом случае уместно рассмотреть связку φ_0, равную сумме

$$\varphi_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^{3} (K_i^2 + \lambda_i \zeta_i'^2),$$

в которой $\zeta_i' = \varepsilon_{(i)} K_{(i)} + (1-\varepsilon_{(i)}) k_{(i)}$, $\lambda_i \geqslant 0$.

Поскольку рассматриваемая система уравнений относительно отклонений K и $\lambda_i^{1/2}\zeta_i'$ $(\overline{\Omega} = \overline{\Omega}(K-k)$ вида

$$dK/dt = [K, \Omega] + u,$$
$$d\Lambda^{1/2}\zeta'/dt = \Lambda^{1/2}v = v'' \tag{3.11}$$

есть система типа (2.1), (2.5), то для ограничения на управления $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2 \leqslant M^2$ справедливы все результаты Атэнса об оптимальной стабилизации. Интересно отметить, что при $\lambda_i = 1$, $i = \overline{1,3}$ для всех трех критериев оптимальности можно построить программирующие регуляторы, так как уравнения для отклонений (3.11) полностью интегрируются в σ-функциях времени, если учесть, что этот случай, как частный при выборе $\lambda_{(j)}(t)$:

$$\lambda_{(j)}(t) = -V_{(j)}(1 + \|\zeta'\|^2 \|K\|^{-2})^{-1/2}$$

содержится в работе [9]. Ограничение на управления не зависит от параметров λ для этого случая; другие частности в связи с $\lambda = -|\max G_i|^{-1}$, $(G_1 = G_2)$ легко поддаются исследованию посредством простой модификации примененных рассуждений.

Считая ε_i достаточно малыми, можно упростить вышеизложенные условия, критерии и выражения для регуляторов, отбросив в них ненулевые степени параметров ε_i.

Отметим другой случай частичной оптимальной стабилизации, когда не устраняются, помимо отклонений σ и β, также отклонения от нуля количеств ζ_i. Остается рассмотреть уравнения на отклонения от нуля переменных

$$d\eta_i/dt = \nu_{(i)}^{-1}(\lambda + G_{(i)}^{-1})^{-1/2}(G_{(i)} - g_{(i)})^{1/2}(g_{(i)}G_{(i)})^{-1/2}(1-\varepsilon_{(i)})^{-1}[\varepsilon_{(i)}v_{(i)} - \\ - \nu_{(i)}^2(\lambda + G_{(i)}^{-1})u_{(i)}] + f_i(\zeta, \eta), \tag{3.12}$$

которые в силу особенностей ортогонального преобразования (3.4), интегралов (3.1), (3.2), (3.3) имеют интеграл — квадрат эвклидовой нормы в подпространстве части переменных η_i, являющемся прямым ортогональным дополнением подпространства ζ_i до фазового пространства ζ_i, η_i, равный $\sum_{i=1}^{3}\eta_i^2$. Именно это свойство уравнений (3.12) служит основанием для применения результатов Атэнса, так что к части переменных η_i приложимы все изложенные выше заключения. Отказываясь от использования газовых рулей ($u_{(i)}=0$), получаем, что для оптимальной стабилизации по переменным η_i, считая w_i равным соответственно выражениям

$$w_i = \varepsilon_{(i)} \nu_{(i)}^{-1} (\lambda + G_{(i)}^{-1})^{-1/2} (G_{(i)} - g_{(i)})^{1/2} (g_{(i)} G_{(i)})^{-1/2} (1 - \varepsilon_{(i)})^{-1} v_{(i)}, \tag{3.13}$$

необходимо, чтобы

$$w_{(j)} = -V_{(j)}\, \eta\, \|\eta\|^{-1},$$

если $v_{(i)}$ ограничены, согласно (3.13), неравенством

$$\|w\| \leqslant M,$$

которое в нулевом приближении по ε_i допускает упрощение

$$\sum_{i=1}^{3} (\lambda G_i + 1)^{-2} G_i^{-1} v_i^2 \leqslant M.$$

Частичная стабилизация проходит по переменным η_i, равным в предыдущем приближении отклонениям от нуля — $(\lambda + G_i)^{1/2} K_i$.

4. Перейдем теперь к следующей задаче, в которой оптимально стабилизуется следующее частное решение уравнений вращения свободного гиростата:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = 1 - \sigma_3 = 0, \tag{4.1}$$

$$K_1 = K_2 = k_1 = k_2 = K - K_3 = k - k_3 = K - k = 0 \tag{4.2}$$

по части переменных, соответствующих отклонениям ω, σ. В дополнение к известным интегралам (3.1), (3.2), (3.3) при начальных отклонениях $\overline{K}_0$ и $\overline{\sigma}_0$, принадлежащих линейному многообразию $\overline{K}_0 = c\overline{\sigma}_0$, при $u = v = 0$ существуют интегралы

$$\overline{K} - c\overline{\sigma} = 0. \tag{4.3}$$

Переходя от переменных ω, σ к переменным η_i, ζ_i, получаем следующие выражения для интегралов φ_2 и (4.3):

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{3} \zeta_i^2 + \sum_{i=1}^{3} \eta_i^2, \tag{4.4}$$

$$\zeta_i = c g^{-1/2} \sigma_{(i)} + \varepsilon_{(i)}^{-1/2} (1 - \varepsilon_{(i)})^{1/2} \eta_{(i)}. \tag{4.5}$$

Здесь ввиду $\nu_i^2(0) = g_i$ переменные η_i выражаются через ω_i так:

$$\eta_i = -G_{(i)}^{1/2} (1 - \varepsilon_{(i)})^{1/2} \omega_{(i)}.$$

Сохранив для отклонений η_i, σ_i от обследуемого частичного решения те же обозначения, получим для них, исходя из формы (4.4) и интегралов (4.5), при $u = v = 0$ интеграл

$$\sum_{i=1}^{3} (c^2 g_{(i)}^{-1} \sigma_{(i)}^2 + 2c g_{(i)}^{-1/2} \varepsilon_{(i)}^{-1/2} (1 - \varepsilon_{(i)})^{1/2} \sigma_{(i)} \eta_{(i)} + \varepsilon_{(i)}^{-1} \eta_{(i)}^2). \tag{4.6}$$

Составив сумму интеграла (4.6) с произведениями квадратов отклонений ζ_i на неопределенные постоянные множители λ_i, получим инвариантную форму

$$\sum_{i=1}^{3} \{c^2 g_{(i)}^{-1} (1 + \lambda_{(i)}) \sigma_i^2 + 2cg_{(i)}^{-1/2} \varepsilon_{(i)}^{-1/2} (1 - \varepsilon_{(i)})^{1/2} (1 + \lambda_{(i)}) \sigma_i \eta_i + + [\varepsilon_{(i)}^{-1} (1 + \lambda_{(i)}) - \lambda_{(i)}] \eta_{(i)}^2\}, \tag{4.7}$$

которая при надлежащем выборе $\lambda_{(i)}$ определена положительно, и, следовательно, существует невырожденное линейное преобразование переменных, зависящее от всех λ:

$$\sigma_i = \sigma_{i1}(\lambda) x_i + \sigma_{i2}(\lambda) y_i, \quad \eta_i = \eta_{i1}(\lambda) x_i + \eta_{i2}(\lambda) y_i, \tag{4.8}$$

сводящее формулу (4.7) к квадрату эвклидовой нормы вектора $\{x_i, y_i\}$. Вектор управления $\overline{w}$ для переменных x_i, y_i может быть получен из вектора $\{u_i, v_i\}$ соответствующим линейным преобразованием $\overline{w} = L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \{u_i, v_i\}$ так, что при $\|w\| \leqslant M$ получаем оптимальную относительно критериев (2.2), (2.3), (2.4) и переменных ω_i, σ_i стабилизацию.

Обсуждение

5. Интересно отметить, что одна и та же оптимальная траектория соответствует различным критериям (2.2) и (2.3). Вся информация о дифференциальных уравнениях рассматриваемых систем — в соответствующих интегралах-связках, что акцентирует роль последних, а также, возможно, частных интегралов. Преобразовав соответствующим образом [6] время, можно говорить об асимптотической устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Athans M., Falb Ph., Lacoss R. T., IEEE Trans. on AC, AC-8 July, No. 3, 196 (1963).
2. Kumar K. S., IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems., AES, **1**, No. 2, 82 (1965).
3. Нисикова И., Хаяси К., Санномия Н., Механика, **2**, 102, 43 (1967).
4. Иослович И. В., Космические исследования, **4**, вып. 4, 545 (1966).
5. Борщевский М. З., Иослович И. В., Космические исследования, **4**, вып. 3, 344 (1966).
6. Летова Т. А., ПММ, **29**, вып. 6, 1116 (1965).
7. Крементуло В. В., ПММ, **30**, вып. 1, 42 (1966).
8. Kipiniak W., IEEE Transactions on AC, AC-**9**, April, 1964, No. 2, p. 188 (1964).
9. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **17**, № 1, 3 (1968).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/II 1968

I. KEIS

VABA GÜROSTAADI SUHTELISE TASAKAALU OPTIMAALSEST ASÜMPTOOTILISEST STABILISEERIMISEST. II

Vaadeldakse asümmeetrilise gürostaadi mõnede faasikoordinaatide optimaalset viimist nulli juhul, kui juhtimisvektor asub teatud fikseeritud ellipsoidis. Leitakse optimaalne juhtimine aegoptimaalse ülesande jaoks, mis ühtlasi minimiseerib kütuse kulu. Eraldi vaadeldakse optimaalse juhtimise ülesannet kütuse kulu minimiseerimiseks.

I. KEIS

ON THE OPTIMAL ASYMPTOTIC STABILIZATION OF THE RELATIVE EQUILIBRIUM OF A FREE GYROSTAT. II

The problems of reducing some phase coordinates of a tumbling asymmetrical gyrostat to zero when the control lies within a fixed ellipsoid are examined in this paper. Special controls are found to drive any initial state to zero in minimum time and with minimum fuel, or with minimum energy.