EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.3.01

Э. РАЙК, И. ПЕТЕРСЕН

МЕТОД ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается метод решения экстремальных задач с ограничениями. Идея метода состоит в том, что вместо экстремальной задачи с ограничениями можно решить задачу без ограничений, если сконструировать такое отображение, которое отображает все пространство в область, заданную ограничениями. Исследуются некоторые свойства данного метода. Приводятся способы построения отображений для некоторых частных случаев.

1. Пусть в рефлексивном пространстве X требуется найти минимум функционала $f(x)$ на некотором множестве Q, заданном ограничениями. Для решения этой задачи могут быть использованы различные методы, как, например, методы прямого поиска, методы допустимых направлений, методы проекций градиента, методы штрафных функций и т. д. В настоящей работе предлагается метод, который вместо задачи на минимум с ограничениями позволяет решить задачу на минимум без ограничений. В этом смысле данный метод сравним с методом штрафных функций. Но если в методе штрафных функций надо оперировать с последовательностью задач на безусловный минимум с различными функционалами, то в рассматриваемом методе мы имеем дело только с одной задачей на безусловный минимум, что и является основным достоинством этого метода. При этом задача без ограничений строится следующим образом. Пусть нам известно некоторое отображение $\varphi(y)$, которое однозначно отображает банахово пространство Y на множество R, всюду плотное в множестве Q. Тогда вместо исходной задачи можем рассмотреть задачу на минимум функционала $f(\varphi(y))$ уже во всем банаховом пространстве Y.

В простейших случаях, например при ограничениях вида $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ на координаты вектора x, такой метод был рассмотрен в [1] для решения задач нелинейного программирования. Подобные отображения применялись раньше также в вариационном исчислении. Цель статьи — предложить указанный метод как общий для решения экстремальных задач с ограничениями, обосновать его и проиллюстрировать в нетривиальном примере построения отображений $\varphi(y)$.

2. Приведем обоснование использования данного метода. Пусть построена минимизирующая последовательность y_n функционала $f(\varphi(y))$, т. е.

$$f(\varphi(y_n)) \to f^* = \inf_{y \in Y} f(\varphi(y)),$$

тогда будет верна

Теорема 1. *Пусть X — рефлексивное пространство и $\varphi(y)$ — оператор, однозначно отображающий банахово пространство Y на множество R, всюду плотное в множестве Q, где Q — выпуклое замкнутое и ограниченное множество. Если y_n — минимизирующая последовательность для функционала $f(\varphi(y))$ и $f(x)$ — слабо непрерывный функционал, то последовательность $x_n = \varphi(y_n)$ является минимизирующей для функционала $f(x)$ на множестве Q и существует подпоследовательность y_{n_k} такая, что $\varphi(y_{n_k})$ слабо сходится к $x^* \in Q$, где $f(x^*) = \min\limits_{x \in Q} f(x)$.*

Доказательство. Заметим сперва, что множество Q в силу замкнутости и выпуклости является слабо замкнутым, а ввиду ограниченности и рефлексивности пространства X — слабо компактным. Но так как функционал $f(x)$, кроме того, слабо непрерывный, то существует $\bar{x} \in Q$, для которого $f(\bar{x}) = \min\limits_{x \in Q} f(x) = \bar{f}$ [2].

Последовательность y_n определяет минимизирующую последовательность $x_n = \varphi(y_n)$ для функционала $f(x)$ на множестве R, т. е. $f(x_n) \to f^* = \inf\limits_{x \in R} f(x) = \inf\limits_{y \in Y} f(\varphi(y))$. Функционал $f(x)$ слабо непрерывный и, следовательно, $f^* = \bar{f} = \min\limits_{x \in Q} f(x)$. Действительно, пусть $f^* > \bar{f}$, это означает, что $\bar{x} \bar{\in} R$. Но множество R всюду плотно в Q и поэтому найдется последовательность $z_n \subset R$, сходящаяся к $\bar{x}$, и в силу слабой непрерывности функционала $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = \bar{f} \geqslant f^*$. Мы получим противоречие с предположением $f^* > \bar{f}$, т. е. x_n является действительно минимизирующей для исходной задачи, а это значит, что $f(x_n) \to \bar{f} = f^*$.

Последовательность x_n является ограниченной, и, следовательно, существует последовательность x_{n_k}, слабо сходящаяся к некоторой точке x^*. Выше была доказана слабая замкнутость множества Q и поэтому $x^* \in Q$. Так как функционал $f(x)$ — слабо непрерывный, то $f(x^*) = \bar{f} = \min\limits_{x \in Q} f(x)$.

В случае, если пространства X, Y суть конечномерные векторные пространства, теорема 1 существенно упрощается и может быть сформулирована в следующем виде:

Теорема 1′. *Пусть R^k означает k-мерное векторное пространство и $x = \varphi(y)$ — отображение, однозначно отображающее некоторое пространство R^m на множество R, всюду плотное в множестве Q, где Q — ограниченное замкнутое множество. Если y_n — минимизирующая последовательность для функции $f(\varphi(y))$ и $f(x)$ — непрерывная функция, то последовательность $x_n = \varphi(y_n)$ является минимизирующей для функции $f(x)$ на множестве Q и существует подпоследовательность y_{n_k} такая, что $\varphi(y_{n_k})$ сходится к $x^* \in Q$, где $f(x^*) = \min\limits_{x \in Q} f(x)$.*

Доказательство этой теоремы легко можно получить, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1. Свойства минимизирующих последовательностей основательно исследованы в работах [3, 4], и мы на них не будем останавливаться.

3. Приведем примеры некоторых отображений из пространства Y на некоторое множество R, всюду плотное в множестве Q гильбертова пространства X.

Пусть множество Q задано с положительно определенным оператором A, действующим из пространства X в себя: $Q = \{x : (x, Ax) \leqslant 1\}$. Тогда в качестве оператора $\varphi(y)$, как легко видеть, можно выбрать

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + (y, Ay)}}\, y. \tag{1}$$

Для выпуклого ограниченного множества Q, содержащего внутреннюю точку $\bar{x}$, можно предложить отображение в виде

$$x = \bar{x} + \frac{\|z(y) - \bar{x}\|}{1 + \|y - \bar{x}\|}\,(y - \bar{x}), \tag{2}$$

где $\bar{x}$ — некоторая фиксированная внутренняя точка, а $z(y)$ — граничная точка множества Q на луче, проходящем через точку y и начинающемся в точке $\bar{x}$. Другими словами, $z(y) \in Q$ и $\bar{x} + \lambda(z(y) - \bar{x}) \bar{\in} Q$ для $\lambda > 1$. Этот пример показывает, что для довольно общей экстремальной задачи с выпуклыми ограничениями существует отображение $\varphi(y)$, хотя и не простое.

Менее тривиальным является следующий случай. Множество Q в гильбертовом пространстве задается как выпуклая замкнутая оболочка фиксированных точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$, т. е.

$$Q = \{x : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}.$$

Отображение $\varphi(y)$ можно в этом случае представить в виде

$$x = \varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\exp(-\|y - x_i\|^2)}{\sum_{j=1}^{m} \exp(-\|y - x_j\|^2)}\, x_i. \tag{3}$$

Очевидно, $\varphi(y) \in Q$ при любом y. Сложнее доказать, что множество значений отображения $\varphi(y)$ всюду плотно в множестве Q. Для этого построим пространство Y', натянутое на векторы $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_m - x_1$ и сдвинутое на вектор x_1. Рассмотрим на пространстве Y' функционал

$$f(y) = \|y - x\|^2 + \ln \sum_{i=1}^{m} \exp(-\|x_i - y\|^2), \tag{4}$$

где x является внутренней точкой множества Q в подпространстве Y' (она существует согласно построению). Этот функционал — дифференцируемый, и его градиент равен:

$$\operatorname{grad} f(y) = 2(y - x) + 2\sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i - y)\exp(-\|x_i - y\|^2)}{\sum_{j=1}^{m} \exp(-\|x_j - y\|^2)} =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{m} \frac{\exp(-\|x_i - y\|^2)}{\sum_{j=1}^{m} \exp(-\|x_j - y\|^2)}\, x_i - 2x. \tag{5}$$

Докажем, что функционал (4) — выпуклый и что если $\|y\| \to \infty$, то $f(y) \to \infty$. При этих условиях существует y такое, что $\operatorname{grad} f(y) = 0$. Сравнивая соотношения (4) и (5), видим, что тогда для любых внутренних точек x множества Q существует $y \in Y' \subset Y$ такое, что $x = \varphi(y)$. Другими словами, множество значений отображения $\varphi(y)$ всюду плотно во множестве Q.

Проверим выпуклость функционала $f(y)$, используя неравенство Коши и монотонность функции $\ln z$:

$$f\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left\|\frac{y_1+y_2}{2}-x\right\|^2+\ln\sum_{i=1}^{m}\exp\left(-\left\|x_i-\frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2\right)=$$

$$=\tfrac{1}{2}\|y_1-x\|^2+\tfrac{1}{2}\|y_2-x\|^2-\tfrac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2+\ln\sum_{i=1}^{m}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\|x_i-y_1\|^2-\right.$$

$$\left.-\tfrac{1}{2}\|x_i-y_2\|^2+\tfrac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2\right)=\tfrac{1}{2}\|y_1-x\|^2+\tfrac{1}{2}\|y_2-x\|^2+$$

$$+\ln\sum_{i=1}^{m}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\|x_i-y_1\|^2-\tfrac{1}{2}\|x_i-y_2\|^2\right)=\tfrac{1}{2}\|y_1-x\|^2+\tfrac{1}{2}\|y_2-x\|^2+$$

$$+\ln\sum_{i=1}^{m}\left[\exp\left(-\|x_i-y_1\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\exp\left(-\|x_i-y_2\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\tfrac{1}{2}\|y_1-x\|^2+\tfrac{1}{2}\|y_2-x\|^2+\tfrac{1}{2}\ln\left[\sum_{i=1}^{m}\exp\left(-\|x_i-y_1\|^2\right)\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\|x_j-y_2\|^2\right)\right]=\tfrac{1}{2}\|y_1-x\|^2+\tfrac{1}{2}\ln\sum_{i=1}^{m}\exp\left(-\|x_i-y_1\|^2\right)+$$

$$+\tfrac{1}{2}\|y_2-x\|^2+\tfrac{1}{2}\ln\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\|x_j-y_2\|^2\right)=\tfrac{1}{2}f(y_1)+\tfrac{1}{2}f(y_2).$$

Докажем теперь, что $f(y)\to\infty$ при $\|y\|\to\infty$. Для этого преобразуем функционал $f(y)$ к виду

$$f(y)=\|y-x\|^2+\ln\sum_{i=1}^{m}\exp\left[-\|x_i-x\|^2-\|y-x\|^2-2(x_i-x,\,x-y)\right]=$$

$$=\ln\sum_{i=1}^{m}\exp\left[-\|x_i-x\|^2-2(x_i-x,\,x-y)\right].\qquad(6)$$

В этом выражении все слагаемые суммы неотрицательны, кроме того по крайней мере одно слагаемое можно оценивать снизу.

Точка x является внутренней точкой, т. е. существует $r>0$ такое, что если $\|x-z\|\leqslant r$, то $z\in Q$. Из выпуклости и замкнутости множества Q следует существование проекции Py точки y на множество Q, где проекция определена $\|Py-y\|=\min\limits_{z\in Q}\|z-y\|$, $Py\in Q$. Тогда для любой точки $y\,\overline{\in}\,Q$ справедлива оценка

$$\|x-y\|\geqslant\|Py-y\|+r.\qquad(7)$$

По построению множество Q является выпуклым многогранником, и, следовательно, для любого $y\,\overline{\in}\,Q$ существует вершина x_i такая, что

$$\|x_i-y\|^2=\|Py-y\|^2+\|x_i-Py\|^2.\qquad(8)$$

Используя соотношения (7) и (8), можно получить следующую оценку:

$$-\|x_i - x\|^2 - 2(x_i - x,\ x - y) = \|x - y\|^2 - \|x_i - y\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|Py - y\|^2 + r^2 + 2r\,\|Py - y\| - \|Py - y\|^2 - \|x_i - Py\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant r^2 + 2r\,\|Py - y\| - R^2 \geqslant r^2 - 2rR_1 - R^2 + 2r\,\|y\|, \tag{9}$$

где $R = \max\limits_{u, v \in Q} \|u - v\|$, $\quad R_1 = \max\limits_{u \in Q} \|u\|$.

Из формулы (6) и неравенства (9) вытекает, что $f(y) \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Box M. J., Computing J., **9**, No. 1, 67 (1966).
2. Вайнберг М. М., Вариационные методы для исследования нелинейных операторов, Техиздат, 1956.
3. Левитин Е. С., Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, № 5, 787 (1966).
4. Райк Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, № 3, 286 (1967).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/I 1968

E. RAIK, I. PETERSEN

KUJUTISTE MEETOD KITSENDUSTEGA EKSTREEMUMÜLESANNETE LAHENDAMISEKS

Artiklis kasutatakse kujutisi kitsendustega ekstreemumülesannete taandamiseks kitsendusteta ülesanneteks. Antakse meetodi teoreetiline põhjendus ja konstrueeritakse sobivad teisendused mõnda tüüpi kitsenduste jaoks.

E. RAIK, I. PETERSEN

A METHOD OF MAPPING FOR SOLVING EXTREMUM PROBLEMS WITH CONSTRAINTS

A general method to reduce an extremum problem with constraints to a problem without constraints is proposed. For this method a mapping $\varphi(y)$ is needed which maps a Banach space Y on a set that is everywhere dense in the constraint set $Q \subset X$. Having such a mapping, it is shown that under quite general conditions a minimizing sequence for $f(\varphi(y))$ on Y generates a minimizing sequence for $f(x)$ restricted to $x \in Q$. For the case where the set Q is defined as the convex hull of a given finite set of X, the corresponding mapping $\varphi(y)$ is constructed.