EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.3.12

LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. ПОЛЛЬ

К МЕТОДАМ НАХОЖДЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК

V. POLL. STATSIONAARSETE PUNKTIDE LEIDMISE MEETODITEST

V. POLL. ON METHODS FOR FINDING STATIONARY VALUES

Рассмотрим некоторую модификацию (ε-метод) методов нахождения стационарных точек функций нескольких переменных, приведенных в [1] и называемых впредь методом 3-х точек (см. [1], формула (9)) и α-методом (см. [1], формула (13)). Сформулируем для ε-метода теорему сходимости, показывающую его порядок сходимости ($k = 1{,}41\ \ldots$). Приведем также некоторые результаты исследования методов, использующих разделенные разности третьего и высшего порядков.

Ниже используются обозначения из [1].

1. Пусть имеется функция

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1}$$

для которой для каждого $x', x'', x''' \in S \subset m_n$ определены разделенные разности $F_1(x'; x'')$, $F_{11}(x'; x''; x''')$, $F_{12}(x'; x''; x''')$.

Рассмотрим следующий итерационный метод (ε-метод):

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F_{11}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; z^{(n-1)}) + F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; z^{(n-1)})]^{-1} \times \\ \times [F_1(x^{(n)}; x^{(n-1)}) + F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; z^{(n-1)}) (x^{(n)} - x^{(n-1)})], \end{aligned} \tag{2}$$

где $z^{(n-1)} = x^{(n)} - \varepsilon F_1(x^{(n)}; x^{(n-1)})$ (здесь ε — достаточно малое положительное число).

Предполагая, что в S у функции (1) существует стационарная точка x^* и для каждого $x', x'', x''' \in S$ выполнены неравенства

1) $\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right| \leqslant f_{ijk} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$

2) $\| [F_{11}(x'; x''; x''') + F_{12}(x'; x''; x''')]^{-1} \| \leqslant p$

3) $\|F_{11}(x'; x''; x''')\| \leqslant K_{11}, \quad \|F_{12}(x'; x''; x''')\| \leqslant K_{12},$

можно получить оценку

$$d_{n+1} \leqslant BTd_n^2 + (A + BK_{12} + CT)\, d_n d_{n-1} + CK_{12} d_{n-1}^2 = \\ = K'd_n^2 + L'd_n d_{n-1} + M'd_{n-1}^2, \qquad (3)$$

где $T = 1 + \varepsilon K_{11}$; $d_i = \|x^* - x^{(i)}\|$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$; A, B, C — константы, определенные в [1].

Если $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ являются начальными приближениями для метода (2), то имеет место следующая

Теорема. *Пусть*

1° *функция* (1) *имеет стационарную точку* x^*, *причем*

$$\max\{\|x^* - x^{(0)}\|, \|x^* - x^{(1)}\|\} \leqslant d;$$

2° *для каждого* x', x'', x''' *из сферы* $S = S(x^*; d)$ *справедливы оценки* 1), 2) *и* 3);

3° $G = (K' + L' + M') < d^{-1}$.

Тогда последовательность (2) *сходится к* x^*, *причем*

$$\|x^* - x^{(n+1)}\| \leqslant G^{-1}(Gd)^{\nu(n+1)} \qquad (n = -1, 0, 1, \ldots),$$

где

$$\nu(n+1) = 2\nu(n-1) \qquad (n \geqslant 1), \\ \nu(0) = \nu(1) = 1. \qquad (4)$$

Доказательство проводится аналогично доказательствам подобных теорем в [1], используя оценку (3).

Разностное уравнение (4) дает порядком сходимости ε-метода $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$, что совпадает с порядком сходимости α-метода. Число значений функций, которые требуется вычислить на каждом шаге итерационного процесса (2), то же, что у α-метода.

2. Предположим, что у функции (1) существует стационарная точка x^* и имеется четыре приближения к ней: $x^{(n)}, x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, x^{(n-3)}$. Тогда нетрудно вывести следующий метод (метод 4-х точек) для нахождения стационарных точек функции (1):

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2} + (F_{113}^{n,\,n-1,\,n-2,\,n-3} + \\ + F_{123}^{n,\,n-1,\,n-2,\,n-3})(\tilde{x}^{(n+1)} - x^{(n-2)})]^{-1} \{F_1^{n,\,n-1} + [F_2^{n,\,n-1,\,n-2} + \\ + F_{123}^{n,\,n-1,\,n-2,\,n-3}(\tilde{x}^{(n+1)} - x^{(n-2)})](x^{(n)} - x^{(n-1)}) + F_{112}^{n,\,n-1,\,n-2,\,n-3} \times \\ \times (\tilde{x}^{(n+1)} - x^{(n)})'(\tilde{x}^{(n+1)} - x^{(n-1)})\}, \qquad (5)$$

где $\tilde{x}^{(n+1)} = x^{(n)} - [F_{11}^{n,\,n-1,\,n-2} + F_{12}^{n,\,n-1,\,n-2}]^{-1} [F_1^{n,\,n-1} + F_2^{n,\,n-1,\,n-2}(x^{(n)} - x^{(n-1)})]$,

т. е. вычисляется по методу 3-х точек.

При подходящих предположениях относительно начальных приближений и разделенных разностей второго и третьего порядков можно доказать теорему сходимости (здесь не приведена ввиду ее громоздкости), показывающую, что порядок сходимости метода (5) определяется из уравнения $k=k^{-1}+k^{-2}+k^{-3}$, т. е. $k=1{,}47\ldots$. В общем, по-видимому, можно построить метод s точек, использующий разделенные разности до $s-1$ порядка, для которого порядок сходимости k определяется из уравнения $k=k^{-1}+k^{-2}+\ldots+k^{-(s-1)}$. Интересно отметить, что если $s\to\infty$, то $k\to 2^{-1}(1+\sqrt{5})=1{,}6\ldots$.

Число значений функций, которые требуется вычислить на каждом шаге итерационного процесса (5), равняется C^3_{n+2} (на первом шаге C^3_{n+3}).

Если вместо приближений $x^{(n)}$, $x^{(n-1)}$, $x^{(n-2)}$, $x^{(n-3)}$ в (5) взять либо $x^{(n)}$, $x^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, где $y^{(n)}=\alpha_1 x^{(n)}+(1-\alpha_1)x^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}=\alpha_2 x^{(n)}+$ $+(1-\alpha_2)x^{(n-1)}$, $\alpha_1\neq\alpha_2$, $0<\alpha_1$, $\alpha_2<1$; либо $x^{(n)}$, $x^{(n-1)}$, $z^{(n)}$, $z^{(n-1)}$, где $z^{(n)}=x^{(n)}-\varepsilon_1 F_1(x^{(n)};x^{(n-1)})$, $z^{(n-1)}=x^{(n)}-\varepsilon_2 F_1(x^{(n)};x^{(n-1)})$, $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$, то получим аналогичные методу (5) методы ($\alpha_1\alpha_2$-метод и $\varepsilon_1\varepsilon_2$-метод), причем в обоих случаях нетрудно показать, что порядок сходимости $k=\sqrt{3}=1{,}73\ldots$. В общем, по-видимому, можно вывести методы ($\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{s-2}$-метод и $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{s-2}$-метод), аналогичные методу s точек и имеющие порядок сходимости $k=\sqrt{s-1}$.

Число значений функций, которые требуется вычислить на каждом шаге итерационного процесса, использующего $\alpha_1\alpha_2$-метод или $\varepsilon_1\varepsilon_s$-метод, равняется $C^3_{n+3}-1$ (на первом шаге C^3_{n+3}).

Численный пример. На ЭЦВМ «Минск-2» был проведен расчет по ε-методу. Функция двух переменных, подвергнутая максимизации, была взята из [1]. При $\varepsilon=2^{-9}$ после 8 итераций (процесс итерации проводили до тех пор, пока $|x^{(n+1)}-x^{(n)}|\leqslant 2^{-12}$) получили $x_1=3{,}000131$, $x_2=2{,}00031$, $f(x_1,x_2)=210{,}9999$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полль В., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **16**, № 2, 157 (1967).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
7/XII 1966