EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.3.08

*П. КАРД*

# РЕЗОНАНСНЫЙ ФИЛЬТР В ВОЛНОВОДЕ

## Введение

Резонансный интерференционный оптический фильтр, основанный на явлении нарушенного полного отражения, был впервые предложен около 20 лет назад [1]. Вначале казалось, что ширина полосы пропускания такого фильтра может быть сделана сколь угодно малой, так как для этого, согласно теории, достаточно лишь в должной мере увеличить толщину полноотражающих слоев. На практике получалось иначе. Оказалось, что при увеличении толщины полноотражающих слоев сверх известного предела ширина полосы пропускания не уменьшается; вместо этого ее интенсивность резко падает. Фильтр становится почти непрозрачным и потому непригодным. По этой, а также по некоторым другим причинам резонансные светофильтры не получили большого распространения.

Причины непрозрачности резонансного светофильтра при большой толщине полноотражающих слоев выяснены недавно в серии статей Л. Иогансеном [2−7] и, с несколько иной точки зрения, Л. Бергштейном и К. Шульманом [8]. Основными являются здесь два обстоятельства: во-первых, ограниченность фильтра и, во-вторых, наклонное падение света. Ими обусловлен своеобразный дифракционный эффект, ведущий к потере прозрачности даже в том случае, если ширина фильтра на много порядков больше длины волны.

В настоящей статье мы хотим указать на другую возможную область применения резонансных фильтров, в которой, по-видимому, указанные обстоятельства, ведущие к утрате прозрачности фильтра, не имеют места. Речь идет об электромагнитном излучении в металлическом волноводе, полость которого заполнена диэлектриком. Если вместо одного диэлектрика волновод содержит два разных диэлектрика, плоскость раздела которых перпендикулярна к оси волновода, то на этой границе распространяющаяся в волноводе волна отчасти отражается и отчасти проходит в другую среду. При определенных условиях отражение может быть полным. Этот случай является полным аналогом обычного полного (внутреннего) отражения на границе двух сред, с той, однако, существенной разницей, что падение волны на границу раздела является нормальным, а не наклонным. Если полноотражающая среда ограничена двумя плоскостями раздела, то в волноводе имеет место нарушенное полное отражение: некоторая доля падающей волны «просачивается» в третью среду. Наконец, при наличии в волноводе по меньшей мере двух полноотражающих участков прохождение волны сквозь них приобретает резонансный характер, т. е. реализуются условия, при которых эта система действует как узкополосный резонансный фильтр.

## Отражение и прохождение электромагнитной волны на границе двух сред в волноводе

Будем рассматривать для определенности цилиндрический волновод с прямоугольным поперечным сечением. В случае сечения иной формы все выводы аналогичны. Будем также предполагать, что стенки волновода имеют бесконечную проводимость. Конечная проводимость обусловливает только некоторое затухание волны, аналогично поглощению в оптической среде. В первом приближении этим затуханием можно пренебречь.

Пусть теперь полость волновода разделена перпендикулярной к его оси плоскостью на две области, 1 и 2, заполненные двумя диэлектриками с электрической проницаемостью $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ и магнитной проницаемостью $\mu_1$, $\mu_2$. Пусть волна падает на границу из среды 1. Обозначим амплитуду потенциала Боргниса (см. [9]) падающей волны через $U_1$, отраженной волны через $U_1'$, прошедшей волны через $U_2$. Тогда из условий непрерывности для векторов поля на границе раздела вытекают следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1(U_1 - U_1') &= \nu_2 U_2 \\ \varepsilon_1(U_1 + U_1') &= \varepsilon_2 U_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

для волны электрического типа и

$$\left.\begin{aligned} \nu_1(U_1 - U_1') &= \nu_2 U_2 \\ \mu_1(U_1 + U_1') &= \mu_2 U_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

для волны магнитного типа. В этих формулах величина $\nu$ определяет фазовую скорость $V$ волны по формуле

$$V = \frac{c}{\nu} \tag{3}$$

и выражается через волновое число $k$, постоянные $\varepsilon$, $\mu$ и параметры волновода следующим образом:

$$\nu = [\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0 - (\pi^2/k^2)(m_1^2/a^2 + m_2^2/b^2)]^{1/2}, \tag{4}$$

где $a$, $b$ — стороны прямоугольного сечения волновода, а $m_1$, $m_2$ — определяющие вид волны целые числа, не равные нулю одновременно.

Из формул (1) и (2) получается:

$$\left.\begin{aligned} U_1' &= U_1(\varepsilon_2\nu_1 - \varepsilon_1\nu_2)(\varepsilon_2\nu_1 + \varepsilon_1\nu_2)^{-1} \\ U_2 &= U_1\, 2\varepsilon_1\nu_1(\varepsilon_2\nu_1 + \varepsilon_1\nu_2)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

для волны электрического типа и

$$\left.\begin{aligned} U_1' &= U_1(\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2)(\mu_2\nu_1 + \mu_1\nu_2)^{-1} \\ U_2 &= U_1\, 2\mu_1\nu_1(\mu_2\nu_1 + \mu_1\nu_2)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

для волны магнитного типа. Эти формулы вполне аналогичны формулам Френеля для отражения и преломления света на границе двух сред. Поэтому при наличии в волноводе нескольких сред, разделенных перпендикулярными к оси поверхностями, теория распространения, отражения и прохождения волн в нем будет аналогична теории распространения света в многослойной пленке.

## Вывод основных формул

Для вывода основных формул нашей проблемы воспользуемся соотношениями, уже известными в теории многослойных оптических пленок. При этом будем придерживаться той формулировки, которая была развита автором ранее (см. [10, 11]).

Обозначим среды по порядку индексами 0, 1, ... , $N$, $N+1$. Границы между средами будем обозначать двумя индексами, принадлежащими прилегающим средам. Так, координаты границ вдоль оси волновода пусть будут $z_{01}$, $z_{12}$, ... , $z_{N,N+1}$. Длину участка волновода, заполненного $k$-й средой, обозначим через $h_k$, так что

$$h_k = z_{k,k+1} - z_{k-1,k}. \tag{7}$$

Временну́ю зависимость всех полевых величин будем считать определенной множителем $e^{i\omega t}$, где $\omega = ck$. Пусть, далее,

$$k\nu_k h_k \equiv \alpha_k. \tag{8}$$

Так как $z$-компонент $S_z$ вектора Умова—Пойнтинга пропорционален $\varepsilon\nu|U|^2$ или $\mu\nu|U|^2$ (здесь и в дальнейшем первое из двух альтернативных выражений относится к волне электрического, а второе — магнитного типа), то вместо амплитуды $U$ введем другую амплитуду $A$, определяемую формулами

$$A = \sqrt{\varepsilon\nu}\, U \qquad \text{или} \qquad A = \sqrt{\mu\nu}\, U, \tag{9}$$

так что

$$S_z \sim |A|^2, \tag{10}$$

где множитель пропорциональности уже не зависит от среды. Введем также амплитудные матрицы

$$A_k^+ = \begin{pmatrix} A_k \exp(-ik\nu_k z_{k,k+1}) \\ A_k' \exp(ik\nu_k z_{k,k+1}) \end{pmatrix} \tag{11}$$

и

$$A_k^- = \begin{pmatrix} A_k \exp(-ik\nu_k z_{k-1,k}) \\ A_k' \exp(ik\nu_k z_{k-1,k}) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $A_k$ и $A_k'$ — амплитуды прямой и обратной волн в $k$-й среде. Наконец, определим вспомогательные величины

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \ln \frac{\nu_i \varepsilon_k}{\nu_k \varepsilon_i} \qquad \text{или} \qquad u_{ik} = \frac{1}{2} \ln \frac{\nu_i \mu_k}{\nu_k \mu_i} \tag{13}$$

и матрицы

$$G(u) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix} \tag{14}$$

и

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Тогда из формул (7), (8), (11) и (12) вытекает

$$A_k^- = M(\alpha_k) A_k^+. \tag{16}$$

Кроме того, из формул (5) и (6), обобщенных на случай, когда в обеих средах, разделенных данной границей, имеется и прямая и обратная волны, вместе с формулами (9) и (13) следует

$$A_k^+ = G(u_{k,k+1}) A_{k+1}^- . \qquad (17)$$

Комбинируя рекуррентным образом последние две формулы, находим

$$A_0^+ = G(u_{01}) M(\alpha_1) G(u_{12}) M(\alpha_2) \ldots G(u_{N-1,N}) M(\alpha_N) G(u_{N,N+1}) A_{N+1}^- . \qquad (18)$$

Если обозначим

$$F = G(u_{01}) M(\alpha_1) G(u_{12}) M(\alpha_2) \ldots G(u_{N-1,N}) M(\alpha_N) G(u_{N,N+1}), \qquad (19)$$

то

$$A_0^+ = F A_{N+1}^- . \qquad (20)$$

Матрица $F$, как вытекает из формул (14), (15) и (19), имеет равный единице определитель:

$$\|F\| = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} = 1. \qquad (21)$$

Притом, если в 0-й и $(N+1)$-й средах $\nu$ вещественно, то

$$\left.\begin{aligned} F_{22} &= F_{11}^* \\ F_{12} &= F_{21}^* . \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

В самом деле, если $\nu$ вещественно во всех средах, то все $u$ и все $\alpha$ тоже вещественны. Но тогда элементы матриц $G$ и $M$, согласно формулам (14) и (15), удовлетворяют соотношениям вида (22); следовательно, как легко убедиться непосредственно, любое произведение матриц $G$ и $M$ тоже удовлетворяет таким же соотношениям. Чтобы доказать соотношения (22) и в том случае, если в некоторых (или даже всех, кроме 0-й и $(N+1)$-й) средах $\nu$ мнимо, заметим прежде всего, что мы можем вообразить формально вдобавок к фактически существующим средам произвольное количество других с длиной участка, равной нулю. Добавлению такой среды, например, между $k$-й и $(k+1)$-й средами соответствовала бы замена в формуле (19) множителя $G(u_{k,k+1})$ равным ему множителем

$$G(u_{kk'}) M(0) G(u_{k',k+1}),$$

где $k'$ — индекс добавленной среды. Если теперь в какой-либо, например, $k$-й среде $\nu_k$ мнимо, то добавим по обе стороны этой среды два одинаковых участка нулевой длины с индексом $k'$ и с вещественным значением $\nu_{k'}$. Тогда в $F$ войдет множитель

$$G(u_{k'k}) M(\alpha_k) G(u_{kk'}).$$

Но так как (для волны электрического типа; в случае волны магнитного типа следует заменить $\varepsilon \to \mu$)

$$u_{k'k} = -u_{kk'} = \frac{1}{2} \ln \frac{\nu_{k'}\varepsilon_k}{|\nu_k|\varepsilon_{k'}} + \frac{\pi i}{4}$$

и

$$M(\alpha_k) = \begin{pmatrix} \exp(|\alpha_k|) & 0 \\ 0 & \exp(-|\alpha_k|) \end{pmatrix},$$

то

$$G(u_{k'k})\,M(\alpha_k)\,G(u_{kk'}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}|\alpha_k| + i\operatorname{sh}|\alpha_k|\cdot\operatorname{sh}\ln\frac{\nu_{k'}\varepsilon_k}{|\nu_k|\varepsilon_{k'}} & -i\operatorname{sh}|\alpha_k|\cdot\operatorname{ch}\ln\frac{\nu_{k'}\varepsilon_k}{|\nu_k|\varepsilon_{k'}} \\ i\operatorname{sh}|\alpha_k|\cdot\operatorname{ch}\ln\frac{\nu_{k'}\varepsilon_k}{|\nu_k|\varepsilon_{k'}} & \operatorname{ch}|\alpha_k| - i\operatorname{sh}|\alpha_k|\cdot\operatorname{sh}\ln\frac{\nu_{k'}\varepsilon_k}{|\nu_k|\varepsilon_{k'}} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Это значит, что этот множитель тоже удовлетворяет соотношениям вида (22). Следовательно, формулы (22) верны и в случае нарушенного полного отражения в любой из сред, заключенных между 0-й и $(N+1)$-й средами.

Наконец, найдем формулы, связывающие элементы матрицы $F$ с коэффициентами отражения и пропускания рассматриваемой системы. Формулы (11), (12) и (20) дают

$$\begin{gathered} A_0\exp(-ik\nu_0 z_{01}) = F_{11}A_{N+1}\exp(-ik\nu_{N+1}z_{N,N+1}) + \\ + F_{12}A'_{N+1}\exp(ik\nu_{N+1}z_{N,N+1}) \end{gathered} \tag{24}$$

$$A'_0\exp(ik\nu_0 z_{01}) = F_{21}A_{N+1}\exp(-ik\nu_{N+1}z_{N,N+1}) + F_{22}A'_{N+1}\exp(ik\nu_{N+1}z_{N,N+1}).$$

Выражая отсюда, с учетом формулы (21), $A'_0\exp(ik\nu_0 z_{01})$ и $A_{N+1}\exp(-ik\nu_{N+1}z_{N,N+1})$, находим

$$\begin{aligned} A'_0\exp(ik\nu_0 z_{01}) &= \frac{F_{21}}{F_{11}}A_0\exp(-ik\nu_0 z_{01}) + \frac{1}{F_{11}}A'_{N+1}\exp(ik\nu_{N+1}z_{N,N+1}) \\ A_{N+1}\exp(-ik\nu_{N+1}z_{N,N+1}) &= \frac{1}{F_{11}}A_0\exp(-ik\nu_0 z_{01}) - \frac{F_{12}}{F_{11}}A'_{N+1}\exp(ik\nu_{N+1}z_{N,N+1}). \end{aligned} \tag{25}$$

Коэффициенты при $A_0\exp(-ik\nu_0 z_{01})$ и $A'_{N+1}\exp(ik\nu_{N+1}z_{N,N+1})$ в правых частях этих формул имеют, в силу формулы (10), смысл амплитудных коэффициентов отражения $r$ и пропускания $d$; именно:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{F_{21}}{F_{11}} \\ d = d' &= \frac{1}{F_{11}} \\ r' &= -\frac{F_{12}}{F_{11}}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где $r$ и $d$ относятся к случаю падения волны из 0-й среды, а $r'$ и $d'$ — к случаю падения волны из $(N+1)$-й среды. Энергетические же коэффициенты отражения $R$ и пропускания $D$ выражаются через амплитудные коэффициенты по формулам

$$\left.\begin{aligned} R &= rr^* \\ D &= dd^*. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

На основании формул (22) и (26) можем окончательно записать матрицу $F$ в виде

$$F = \begin{pmatrix} 1/d & r^*/d^* \\ r/d & 1/d^* \end{pmatrix}, \tag{28}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} r' &= -r^* d/d^* \\ d' &= d, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

и, в силу формулы (21),

$$\frac{1 - rr^*}{dd^*} = 1, \tag{30}$$

что равносильно формуле

$$R + D = 1. \tag{31}$$

Последняя формула выражает сохранение энергии при отражении и прохождении волны.

## Формула коэффициента пропускания резонансного фильтра

Нам осталось только получить формулу коэффициента пропускания резонансного фильтра. В этом нет уже ничего нового, так как основные формулы, выведенные в предыдущем разделе, совершенно аналогичны соответствующим формулам теории интерференционных пленок. Ограничимся поэтому написанием окончательной формулы. Коэффициент пропускания $D$ симметричного резонансного фильтра определяется формулой

$$D^{-1} = 1 + (4R_1/D_1^2)\sin^2(\alpha_0 - \xi_1). \tag{32}$$

Здесь $R_1$ и $D_1$ — коэффициенты отражения и пропускания отдельного полноотражающего участка, $\alpha_0 = kh_0 \nu_0$ относится к срединному участку, нахсдящемуся между двумя полноотражающими участками, а $\xi_1$ определяется формулой

$$r_1 = \sqrt{R_1}\, e^{i\xi_1}, \tag{33}$$

где $r_1$ — амплитудный коэффициент отражения полноотражающего участка при падении волны изнутри (т. е. из срединного участка). Для $R_1$ и $\xi_1$ в простейшем случае, когда срединный участок заполнен тем же диэлектриком, что и волновод вне фильтра, имеют место формулы [см. (23)]

$$R_1 = (1 + \mathrm{sh}^{-2}\gamma\, \mathrm{ch}^{-2} U)^{-1} \tag{34}$$

и

$$\tan \xi_1 = \mathrm{cth}\,\gamma / \mathrm{sh}\, U, \tag{35}$$

где

$$\gamma = k|\nu|h \tag{36}$$

и (для волны электрического типа)

$$U = \ln \frac{\varepsilon \nu_0}{\varepsilon_0 |\nu|}, \tag{37}$$

причем $\varepsilon_0$, $\nu_0$ относятся к срединному участку, а $\varepsilon$, $|\nu|$ — к полноотражающему участку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Leurgans P., Turner A. F., J. Opt. Soc. Amer., 37, No. 12, 983 (1947).
2. Иогансен Л. В., Оптика и спектроскопия, 11, № 4, 542 (1961).
3. Иогансен Л. В., Оптика и спектроскопия, 12, № 2, 318 (1962).
4. Иогансен Л. В., Оптика и спектроскопия, 13, № 2, 266 (1962).
5. Иогансен Л. В., Оптика и спектроскопия, 14, № 1, 131 (1963).
6. Иогансен Л. В., Ж. эксперим. и теор. физ., 40, № 6, 1838 (1961).
7. Иогансен Л. В., Ж. техн. физ., 32, № 4, 406 (1962).
8. Bergstein L., Shulman C., Appl. Opt., 5, No. 1, 9 (1966).
9. Луи де-Бройль, Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, М., 1948.
10. Кард П. Г., Теория расчета и синтеза многослойных оптических покрытий, Автореф. дисс., ГОИ, 1962.
11. Кард П. Г., Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок, Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1967 (в печати).

*Тартуский государственный университет*

Поступила в редакцию 4/IV 1967

*P. KARD*

## RESONANTSFILTER LAINEJUHIS

Optilise resonantsfiltri teooria on kohandatud analoogilise probleemiga lainejuhis. Kui viimane on täidetud mitme dielektrikuga, mis on üksteisest lahutatud lainejuhi telje normaaltasanditega, on elektromagnetilise laine levimine selles lainejuhis täiesti analoogiline valguse levimisega kihilises keskkonnas. Kui mõne dielektriku murdumisnäitaja on küllalt väike, võib lainearv saada selles dielektrikus imaginaarseks. Sel juhul peab peegeldumine olema täielik analoogiliselt valguse täieliku (sise)peegeldumisega. Seejuures laine ei lange lahutuspinnale kaldu, vaid risti. Ka rikutud täielik peegeldumine on lainejuhis võimalik. Seega on lainejuhis võimalik konstrueerida kitsa läbilaskeribaga resonantsfilter. Artiklis on tuletatud niisuguse filtri teooria põhivalemid.

*P. KARD*

## RESONANCE FILTER IN A WAVE-GUIDE

The theory of the optical resonance filters is adapted for the analogous problem in a wave-guide. If the wave-guide is filled with a number of dielectrics separated by planes normal to the axis, then the propagation of an electromagnetic wave in this guide is fully analogous to the propagation of light in a layered medium. When the refractive index of some dielectric is sufficiently small, it is possible that the wave number in this dielectric becomes imaginary. In this case the reflection must be total, in full analogy with the total (internal) reflection of light, but the incidence is not oblique. The frustrated total reflection is also possible. Hence a narrow-band resonance filter based on the frustrated total reflection can be constructed in a wave-guide. The basic formulae are derived for this problem.