EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 3
https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.3.06

И. КЕЙС

О ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Условия существования общего четвертого алгебраического интеграла для уравнений движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой указаны в работе [5].

Для получения известных частных случаев интегрируемости упомянутых уравнений А. Богоявленский использовал подход С. Ковалевской [1].

Ниже методом Богоявленского выделены гиростатические аналоги случаев интегрируемости Вольтерра, Лагранжа, Гесса, Гриоли, Бобылева, а также указано трансцендентное обобщение последнего случая для специального силового поля. Для гиростата с центром масс на главной оси методом малого параметра Пуанкаре-Гюссона получены некоторые необходимые условия существования частных алгебраических интегралов уравнений движения, в числе которых специфическое значение постоянной интеграла Якоби и равенство нулю постоянной площадей.

1. Следуя приему работы [1], выделим некоторые случаи существования частных интегралов уравнений

$$\begin{gathered} A dp (dt)^{-1} = (B - C) qr + y_0 \gamma_3 - z_0 \gamma_2 + m_2 r - m_3 q, \\ d\gamma_1 (dt)^{-1} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \end{gathered} \qquad \left\| \begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ p, & q, & r \\ x_0, & y_0, & z_0 \\ A, & B, & C \end{matrix} \right\| \tag{1.0}$$

(матрица означает циклическую замену уравнений) и приведем обобщение случая Бобылева для специального поля сил. Для исключения переменных γ с помощью интегралов $\sum_{i=1}^{3} \gamma_i^2 = 1$,

$$\begin{gathered} (Ap + m_1)\gamma_1 + (Bq + m_2)\gamma_2 + (Cr + m_3)\gamma_3 = \sigma, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = h \end{gathered}$$

из уравнений (1.0) рассмотрим согласно [1, 2] получаемые значения γ как функции величин ϱ, ν, τ, σ, w, где

$$\begin{gathered} \varrho = \varrho_1 + m_1 x_0 + m_2 y_0 + m_3 z_0 = (Ap + m_1) x_0 + (Bq + m_2) y_0 + (Cr + m_3) z_0 \\ \nu = \nu_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = (Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 \\ \tau = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \quad \sigma = x_0 p + y_0 q + z_0 r, \quad w = p^2 + q^2 + r^2. \end{gathered}$$

Для несферического гиростата в качестве независимых переменных изберем ϱ_1, ν_1, τ, а для σ, w, исключая p, q, r из соотношений

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = \nu_1 - A\tau + \chi$$

$$\begin{matrix} \tau - Aw = (B-A)q^2 + (C-A)r^2 \\ \varrho_1 - A\sigma = (B-A)y_0 q + (C-A)z_0 r \\ \chi = -2(Am_1 p + Bm_2 q + Cm_3 r) \end{matrix} \quad \left\| \begin{matrix} p, & q, & r \\ x_0, & y_0, & z_0 \\ A, & B, & C \end{matrix} \right\| \qquad (1.1)$$

получим значения как функции от ϱ_1, ν_1, τ. Поскольку левые части соотношений (1.1) совпадают с рассмотренными в [1], то заменяя $\nu_1 - A\tau$ на $\nu_1 - A\tau + \chi$ циклически в соответствующих формулах [1], получим равенства:

$$\{C[A(B-C)x_0^2 + B(A-C)y_0^2 + C(B-A)z_0^2]r^2 - 2C(B-A)z_0\varrho_1 r + $$
$$+ (B-A)\varrho_1^2 + Ax_0^2(\nu_1 - B\tau + \chi) + By_0^2 \ (\nu_1 - A\tau + \chi)\}^2 - 4B(B-$$
$$-A)y_0^2(Cz_0 r - \varrho_1)^2[C(A-C)r^2 + \nu_1 - A\tau + \chi] = 0 \qquad (1.2)$$

$$\{A[A(B-C)x_0^2 + B(A-C)y_0^2 + C(B-A)z_0^2\,]p^2 - 2A(B-C)x_0\varrho_1 p + $$
$$+ (B-C)\varrho_1^2 + By_0^2(\nu_1 - C\tau + \chi) + Cz_0^2(\nu_1 - B\tau + \chi)\}^2 + 4B(B-C)y_0^2 \times$$
$$\times (Ax_0 p - \varrho_1)^2[A(A-C)p^2 - \nu_1 + C\tau - \chi] = 0. \qquad (1.3)$$

Значение χ как функции ϱ_1, τ, w нетрудно составить, исключая p, q, r из выражений для этих величин. Для r из (1.2) и p из (1.3) можно указать простые выражения через ϱ_1, ν_1, τ, χ при $y_0 = 0$, а значение χ не будет содержать радикалов при $m_2 = 0$. Отметим, что эти условия не являются необходимыми для случая постоянных p, r, а также для сферического гиростата. При рассмотрении равенств (1.2) и (1.3) возможны два варианта:

1° если $V = A(B-C)x_0^2 - C(A-B)z_0^2 \neq 0$, то p и r выражаются так:

$$\begin{aligned} Vp &= (B-C)x_0\varrho_1 + Cz_0(m_1 z_0 - m_3 x_0) + z_0(CA^{-1})^{1/2}H^{1/2} \\ Vr &= (B-A)z_0\varrho_1 + Ax_0(m_3 x_0 - m_1 z_0) - x_0(AC^{-1})^{1/2}H^{1/2} \end{aligned} \qquad (1.4)$$

$$H = (A-B)(B-C)\ (\varrho_1 + \mathrm{E})^2 - V\{\nu_1 - B\tau + [A(B-C)m_1^2 - $$
$$- C(A-B)m_3^2]D^{-2}\} \qquad (1.5)$$

$$\mathrm{E} = Ax_0 m_1(A-B)^{-1} + Cz_0 m_3(C-B)^{-1}, \quad D^2 = (A-B)(B-C);$$

2° при $V = 0$ для p и r имеем

$$p = (2Ax_0)^{-1}\varrho_1 + [2(A-B)]^{-1}x_0(\nu_1 - B\tau + \chi)$$
$$r = (2Cz_0)^{-1}\varrho_1 + [2(C-B)]^{-1}z_0(\nu_1 - B\tau + \chi),$$

а для σ, согласно восьмой строке соотношений (1.1), получим:

$$\sigma(\varrho_1 + \mathrm{E}) = (2AC)^{-1}\{(A+C)\varrho_1(\varrho_1 + \mathrm{E}) + $$
$$+ (A-C)\varrho_1[Ax_0 m_1(A-B)^{-1} - Cz_0 m_3(C-B)^{-1}] + $$
$$+ ACB^{-1}(B\tau - \nu_1)(x_0^2 + z_0^2)\}. \qquad (1.6)$$

В случае, когда

$$\varrho_1 + \mathrm{E} = \nu_1 - B\tau + D^{-2}[-A(C-B)m_1^2 - \\ - C(A-B)m_3^2] = Q = 0, \tag{1.7}$$

соотношение (1.6) выполняется при произвольных значениях σ. Имея в виду равенства (1.7), отметим, что уравнения (1.2) и (1.3) удовлетворяются при произвольных значениях p и r. Первое из соотношений (1.7), ввиду $y_0 = 0$, $m_2 = 0$, $V = 0$, есть частный интеграл, который определяет гиростатический аналог случая интегрируемости Гесса.

Возвращаясь к выражениям (1.4) случая 1° и подставляя их в пятое и восьмое уравнения системы (1.1), получаем для σ и w формулы:

$$ACV\sigma = [(B-C)x_0^2 - (A-B)z_0^2](AC)^{1/2}\varrho_1 + \\ + (A-C)x_0z_0[(AC)^{1/2}(m_3x_0 - m_1z_0) \mp H^{1/2}] \tag{1.8}$$

$$ABCV^2 w = ACV^2\tau - PU\varrho_1^2 + 2ACPx_0z_0(m_3x_0 - m_1z_0)\varrho_1 + \\ + AC[A^2(B-C)x_0^2 - C^2(A-B)z_0^2](m_3x_0 - m_1z_0)^2 \mp \\ \mp 2(AC)^{1/2}Px_0z_0\varrho_1H^{1/2} \mp 2(AC)^{1/2}(m_3x_0 - m_1z_0)UH^{1/2} - V[A^2(B-C)x_0^2 - \\ - C^2(A-B)z_0^2]Q, \tag{1.9}$$

где обозначены:

$$P = (A-B)(B-C)(C-A), \quad U = A(B-C)x_0^2 + C(A-B)z_0^2.$$

Укажем теперь, что некоторые общие и частные интегралы рассматриваемой задачи существуют при отсутствии радикалов в уравнениях, составленных аналогично [1, 2], для тяжелого гиростата. Это возможно (см. [1, 2]), когда выражения σ, w через переменные ϱ_1, ν_1, τ не содержат радикалов, или в случае постоянных σ и w. На основании формул (1.8) и (1.9) эти предположения выполняются при соблюдении одного или нескольких условий типа:

1° $x_0 = 0$, $m_1 = 0$	5° $x_0 = z_0 = 0$
2° $x_0 = 0$, $A = B$	6° $A = C$, $(x_0^2 - z_0^2)(m_3x_0 - m_1z_0) = 0$
3° $z_0 = 0$, $m_3 = 0$	7° $H = H_0 = \mathrm{const}$
4° $z_0 = 0$, $C = B$	8° $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$, $w = w_0 = \mathrm{const}$.

Отсюда нетрудно указать ряд случаев существования общих и частных интегралов уравнений (1.0). Действительно, совокупность условий 1°, 2°, $y_0 = 0$, $m_2 = 0$ определяет гиростатический аналог случая интегрируемости Лагранжа: $r = r_0$ (r_0 — произвольная постоянная), тогда как условия 1° и 3° соответствуют случаю интегрируемости Эйлера—Пуансо в динамике твердого тела. Условие 5° определяет подслучай интегрируемости уравнений (1.0), обследованный Вольтерра, и, поскольку величины ϱ_1 и σ исчезают, а величина ν_1 обращается в постоянную, нет необходимости требовать обращения в нуль постоянной m_2. Объединяя условия 3° и 7°, получим из выражения (1.5) для H равенство $H = H_0 = A(C-B)x_0^2[C(C-B)r^2 + m_1^2]$, из которого следует (если отбросить случаи Лагранжа и Вольтерра), что величина r постоянная. Положим $r = 0$; тогда из первого уравнения системы (1.0) следует, что $p = p = \mathrm{const}$, а из второго, третьего и пятого уравнений системы (1.0) установим, что для существования полученного гиростатического подслучая Бобылева необходимо равенство

$$m_1 + (A - 2B) p_0 = 0.$$

Объединим условия 7° и 8°. Для того, чтобы избежать постоянных решений p и r_0, необходимо допустить, что справедливы соотношения $(A - B) z_0^2 - (B - C) x_0^2 = 0$ и $m_3 x_0 - m_1 z_0 = 0$, которые совместно с требованием обращения выражения (1.9) в тождество ($y_0 = 0$, $m_2 = 0$, $w = w_0$) выделяют случай интегрируемости Гриоли.

Случай постоянных p и r в соответствующих силовых полях рассмотрен в работе [3], причем отмечено, что необходимыми условиями его существования являются равенства:

$$[(B - A) q_0 + m_2] q_0^{-1} = [(C - A) r_0 + m_3] r_0^{-1} = A s^{-1},$$

в которых s — свободный параметр. Отмечено также, что значения s, равные -1 и $+1$, образуют особые подслучаи. Равенство $s = -1$ определяет в трансцендентном силовом поле трансцендентный частный интеграл. В этом подслучае выполняются следующие соотношения:

$$\sigma p = A\gamma_1 (z \mp m_1 A^{-1})^2 - \sigma m_1 A^{-1}, \quad m_2 + B q_0 = m_3 + C r_0 = 0$$
$$2U = Az^2 - h, \quad A (q_0 \gamma_2 + r_0 \gamma_3) = \sigma(\mp m_1 A^{-1} \xi^{-1} + \ln(k_1 \xi)), \; \xi = z \mp m_1 A^{-1},$$

в которых h и σ обозначают постоянные интеграла Якоби и площадей, k_1 — произвольную размерную постоянную, а зависимость силовой функции U от аргумента $q_0\gamma_2 + r_0\gamma_3$ представлена через параметр z. Подслучай $s = +1$ есть тривиальное обобщение гиростатического аналога случая интегрируемости Бобылева [4]. Здесь выполняются равенства

$$p = k_2 \gamma_1 + m_1 A^{-1}, \qquad U = k_2 (q_0 \gamma_2 + r \gamma_3) + k_0,$$
$$0 = m_2 + (B - 2A) q_0 = m_3 + (C - 2A) r_0,$$

в которых k_2 — произвольная размерная постоянная, а $2k_0 = k_1 \sigma + m_1^2 A^{-1} - h$.

2. Установим теперь, какие условия являются необходимыми для существования алгебраических частных интегралов в случае 3°. Уравнения, определяющие величины ν, ϱ, τ $(\varrho = \varrho_1 x_0^{-1})$, записываются так:

$$\begin{gathered}(d\varrho dt_1^{-1})^2 = k_1 \nu^2 + (k_2 \tau + a_2 \varrho^2 + 2a_1 \varrho + a_0)\, \nu + \tau^2 + (b_2 \varrho^2 + 2b_1 \varrho + b_0)\tau + \\ + c_4 \varrho^4 + c_3 \varrho^3 + c_2 \varrho^2 + 2c_1 \varrho + c_0 \\ d\nu dt_1^{-1} = [Q_0^2 - (\tau - h)^2]\nu + \\ + 2kQ_0 \tau\varrho - Q_0^2 \varrho^2 - 2kQ_0 h\varrho - Q_0^2 k^2 \\ (\nu - \varrho^2)\, d\tau dt_1^{-1} = [\tau - a(\varrho - m_1)^2] d\nu dt_1^{-1} + (Q_0 k - \tau\varrho + h\varrho)\, d\varrho\, (dt_1)^{-1}.\end{gathered} \tag{2.0}$$

Здесь обозначены: k — постоянная площадей, h — постоянная интеграла Якоби; для остальных постоянных имеем:

$$BCk_1 = -1, \quad BCk_2 = B + C, \quad A^2 BC a_2 = A^2 - BC,$$
$$ABCa_1 = (B + C) m_1, \quad ABCa_0 = -(B + C) m_1^2$$
$$ABCb_2 = 2BC - A(B + C), \quad Ab_1 = -2m_1, \quad Ab_0 = 2m_1^2,$$

$$Q_0 = 2Mgx_0, \quad Aa = 1, \quad A^2BCc_4 = (A-B)(C-A)$$
$$A^2BCc_3 = 2[2BC - A(B+C)]m_1, \quad A^2BCc_2 = [A(B+C) - 6BC]m_1^2,$$
$$Ac_1 = 2m_1^3, \quad Ac_0 = -m_1^4.$$

$dt\,dt_1^{-1} = Mg$ (M — масса гиростата).

Предполагается, что $p \neq \mathrm{const}$ на исследуемых частных решениях.

От системы (2.0), исключая время, приходим к системе двух уравнений:

$$[k_1\nu^2 + (k_2\tau + a_2\varrho^2 + 2a_1\varrho + a_0)\nu - \tau^2 + (b_2\varrho^2 + 2b_1\varrho + b_0)\tau +$$
$$+ P_4](d\nu)^2 = \{[Q_0^2 - (\tau-h)^2]\nu + 2kQ_0\varrho(\tau-h) - Q_0^2(k^2+\varrho^2)\}(d\varrho)^2$$
$$(\nu - \varrho^2)\,d\tau d\varrho^{-1} = [\tau - a(\varrho - m_1)^2]d\nu d\varrho^{-1} + kQ_0 + \varrho(h-\tau) \qquad (2.1)$$

(здесь $P_4 = c_4\varrho^4 + c_3\varrho^3 + c_2\varrho^2 + 2c_1\varrho + c_0$),

по отношению к которой поставим вопрос о нахождении некоторых необходимых условий существования частных алгебраических интегралов.

При $p \neq \mathrm{const}$ система (2.1), как отмечено в [5], эквивалентна системе (2.0) в отношении этих условий, так что все результаты, полученные для системы (2.1), справедливы также для системы (2.0). Введем в уравнения (2.1) малый параметр λ посредством замены ν, ϱ, τ на $\lambda\nu$, $\lambda\varrho$, τ, после чего уравнения (2.1) следует записать следующим образом:

$$(\nu - \lambda\varrho^2)\,d\tau d\varrho^{-1} = (\tau - am_1^2)\,d\nu d\varrho^{-1} + \lambda[2am_1 d\nu d\varrho^{-1} - \varrho(\tau-h)] +$$
$$+ kQ_0 - \lambda^2 a\varrho^2\,d\nu d\varrho^{-1}$$
$$[-\tau^2 + b_0\tau + c_0 + 2\lambda(c_1\varrho + b_1\tau) +$$
$$+ \lambda(k_2\tau + a_0)\nu + \lambda^2(\ldots)](d\nu)^2 = [-k^2Q_0^2 + \lambda\{2kQ_0\varrho(\tau-h) + \nu[Q_0^2 -$$
$$- (\tau-h)^2] - \lambda^2Q_0^2\varrho^2\}(d\varrho)^2. \qquad (2.2)$$

Предположим, что система (2.1) обладает алгебраическим интегралом $\Psi(\varrho, \nu, \tau) = \mathrm{const}$, который после замены представим сходящимся рядом по степеням $\lambda^{\frac{1}{n}}$ с коэффициентами — алгебраическими функциями ϱ, ν, τ:

$$F_0(\nu, \tau, \varrho) + \lambda^{\frac{1}{n}} F_1(\nu, \tau, \varrho) + \ldots + \lambda F_n(\nu, \tau, \varrho) + \ldots = \mathrm{const}.$$

Решение системы (2.2), как обычно (см. [5]), определяется рядами $\nu = \nu_0(\varrho) + \lambda\nu_1(\varrho) + \ldots$, $\tau = \tau_0(\varrho) + \lambda\tau_1(\varrho) + \ldots$, тогда как интегралами дифференциальных уравнений будут выражения $F_0 = \mathrm{const}$, $I_1(F) = F_n(\nu_0, \tau_0, \varrho) + \nu_1(\partial F_0/\partial\nu_0) + \tau_2(\partial F_0/\partial\tau_0) = \mathrm{const}$. Для ν_0, τ_0 имеем из (2.2) уравнения

$$\nu_0 d\tau_0 d\varrho^{-1} = (\tau_0 - am_1^2)\,d\nu_0\,d\varrho^{-1} + kQ_0$$
$$(\tau_0 - am_1^2)^2 d\nu_0^2 = k^2Q_0^2\,d\varrho^2. \qquad (2.3)$$

Уравнения (2.3) определяют два многообразия решений в зависимости от выбора знака при извлечении радикала во втором уравнении из системы (2.3). Пусть сперва $d\nu_0 d\varrho^{-1} = -kQ_0(\tau_0 - am_1^2)$, тогда система (2.3) имеет решение $\tau_0 = l = \mathrm{const}$, если искомый частный интеграл такой, что при введенном λ-преобразовании $l \neq am_1^2$, то на исследуемой кривой существует конечная производная $d\nu_0 d\varrho^{-1}$ и общее решение уравнений (2.3) определяется формулами $\nu_0 = -kQ_0\varrho(l - am_1^2)^{-1} + C_1$, $\tau_0 = l$. Здесь C_1 наравне с остальными C_i обозначает постоянную.

Для ν_1 и τ_1 из (2.2) аналогичным образом получаем уравнения

$$\nu_0 d\tau_1 d\varrho^{-1} = (l - am_1^2) d\nu_1 d\varrho^{-1} + 2amm_1\varrho + (h - l)\varrho \tag{2.4}$$

$$d\nu_1 d\varrho^{-1} = (2m)^{-1} k^2 Q_0^2 (b_0 - 2l)\tau_1 (l - am_1^2)^{-4} + (2m)^{-1} L(\nu_0)(l - am_1^2)^{-4},$$

здесь $L(\nu_0) = A'\nu_0 + B'$, $m(am_1^2 - l) = kQ_0$

$$A' = (l - am_1^2)\{(l - am_1^2)[(l - h)^2 - Q_0^2] + k^2 Q_0^2 (k_2 l + a_0)(l - am_1^2)^{-1} + $$
$$+ 2[l - h + (b_1 l + c_1)k^{-1}Q_0^{-1}]\}$$
$$B' = 2(l - am_1^2)[k^{-1}Q_0^{-1}(b_1 l - c_1) + h - l].$$

Если в качестве независимой переменной избрать ν_0, то для определения τ_1 имеем уравнение: $\nu_0 d\tau_1 d\nu_0^{-2} = -\tau_1 + 2^{-1}m^{-2}(l - am_1^2)^{-3}L(\nu_0)$. Отсюда для τ_1 имеем: $\tau_1 = (2m^2)^{-1}(l - am_1^2)^{-3}[2^{-1}A'\nu_0 + B' + C_2\nu_0^{-1}]$. Подставив это решение в правую часть второго уравнения системы (2.4), приходим к уравнению вида $d\nu_1(d\nu_0)^{-1} = -(2m^2)^{-1}C_2(l - am_1^2)^{-3}\nu_0^{-1} + P(\nu_0)$ (здесь $P(\nu_0)$ — некоторый полином от ν_0), из которого следует, что для устранения логарифмической функции в интеграле необходимо предположить, что $C_2 = 0$ или искомый алгебраический интеграл Ψ^1 такой, что при введенном λ-преобразовании соответствующие частные решения ν и τ удовлетворяют равенствам

$$\tau_1(0) = (A'C_1 + 2B')4^{-1}m^{-2}(l - am_1^2)^{-3}, \tag{2.5}$$

$$\text{если } \nu_0(0) = C_1,$$

либо выражение $\tau_1(\partial\Psi_0^1/\partial\tau_0) + \Psi_{n0}^1(\varrho, \nu_0, \tau_0)$ не содержит ϱ. (2.6)

Исключая из рассмотрения частные интегралы Ψ^1, определенные начальными данными (2.5) или (2.6), приходим к выводу, что для существования всякого другого решения, соответствующего алгебраическому интегралу Ψ, отличному от интегралов Ψ^1, необходимо, чтобы $kQ_0 = 0$, так как в этом случае проведенные вычисления теряют силу. Рассмотрим частные интегралы, соответствующие этой ветви, когда последние даются рядами по параметру λ, введенному в уравнения (2.1) другим способом. Определим новые переменные, заменив величины ϱ, ν, τ на $\lambda^4\varrho$, $\lambda^7\nu$, $\lambda^{-3}\tau$. Тогда уравнения (2.1) будут содержать параметр λ с точностью до третьего порядка малости следующим образом:

$$(d\nu d\varrho^{-1})^2 = \lambda\nu + k^2Q_0^2\tau^{-2} - 2\lambda kQ_0\varrho\tau^{-2} + \lambda^3(\ldots)$$

$$(\nu - \lambda\varrho^2)d\tau d\varrho^{-1} = \tau d\nu d\varrho^{-1} + kQ_0 - \lambda\tau\varrho + \lambda^3(\ldots). \tag{2.7}$$

Нетрудно получить формулы, определяющие нулевое приближение решений системы (2.7) в виде $\tau_0 = C_3$, $\nu_0 = -kQ_0C_3^{-1}\varrho + C_4$. Если теперь избрать в качестве независимой переменной ν_0, то для ν_1, τ_1 из системы (2.7) следуют уравнения

$$\nu_0 d\tau_1 d\nu_0^{-1} = -\tau_1 + (2k^2Q_0^2)^{-1}\tau_0^2\nu_0$$

$$d\nu_1 d\nu_0^{-1} = (2k^2Q_0^2)^{-1}C_3^2\nu_0 - C_3^{-1}\tau_1 + (k^2Q_0^2)^{-1}C_3^2(\nu_0 - C_4), \qquad (2.8)$$

которые для τ_1 имеют решение $\tau_1 = 4^{-1}C_3^3(k^2Q_0^2)^{-1}\nu_0^1 + C_5\nu_0^{-1}$. Подставляя это значение τ_1 во второе уравнение системы (2.8), получим уравнение

$$d\nu_1 d\nu_0^{-1} = -C_5C_3^{-1}\nu_0^{-1} + 5C_3^2 4^{-1}(k^2Q_0^2)^{-1}\nu_0 - C_4C_3^2(k^2Q_0^2)^{-1},$$

которое решается алгебраической функцией от ν_0, когда

$$C_5 = 0, \qquad (2.9)$$

или же выражение $\tau_1(\partial\Psi_0^1/\partial\tau_0) + \Psi_{n0}^1(\varrho, \nu_0, \tau_0)$ (2.10)

не содержит ϱ, либо уравнение, определяющее ν_1, не может быть получено указанным способом, если $kQ_0 = 0$. Тогда для всех частных решений, соответствующих искомому алгебраическому интегралу Ψ и обладающих тем свойством, что при указанном λ-преобразовании первый член разложения τ в ряд по λ не есть нуль, τ_1 не исчезает вместе с ν_0, а выражение (2.10) содержит ϱ, необходимо равенство $kQ_0 = 0$. Исключаемые из рассмотрения алгебраические интегралы Ψ^1, для существования которых приведенное выше условие не является необходимым, можно определить еще одним дополнительным условием. Запишем с этой целью коэффициент I_2 при λ^2 в разложении интеграла уравнений (2.7) для решений первого многообразия:

$$I_2(F) = F_{2n}(\varrho, \nu_0, \tau_0) + \nu_1(\partial F_n/\partial\nu_0) + \tau_1(\partial F_n/\partial\tau) + \nu_2(\partial F_0/\partial\nu_0) + \\ + \tau_2(\partial F_0/\partial\tau_0), \qquad (2.11)$$

о котором, в соответствии с предположениями, а также в силу решений системы (2.8)

$$\nu_1 = 5\tau_0^2\nu_0^2 8^{-1}k^{-2}Q_0^{-2} - C_4\tau_0^2k^{-2}Q_0^{-2}\nu_0^{-1} + C_6, \quad \tau_1 = 4^{-1}\tau_0^3\nu_0 k^{-2}Q_0^{-2}$$

известно, что все члены, кроме, может быть, ν_2 и τ_2, являются алгебраическими функциями ϱ. Тогда вопрос о существовании алгебраических интегралов Ψ^1 приводится к установлению типа функций $\nu_2(\varrho)$ и $\tau_2(\varrho)$ или, что равносильно, функций $\nu_2(\nu_0)$, $\tau_2(\nu_0)$, для которых согласно (2.7) и (2.11) имеем уравнения

$$\nu_0\nu_0'\dot\tau_2 = \nu_0'\tau_2 + \tau_0\nu_0'\dot\nu_2' - \nu_0'\nu_1\dot\tau_1 + \nu_0'\dot\nu_1\tau_1 + \nu_0'\varrho^2\dot\tau_1 - \tau_1\varrho \qquad (2.12)$$

$$2\nu_0'^2\dot\nu_2 = -2k^2Q_0^2\tau_0^{-3}\tau_2 - \nu_0'^2\dot\nu_1^2 + \nu_1 + 3k^2Q_0^2\tau_0^{-4}\tau_1^2 + 4kQ_0\tau_0^{-2}\varrho\tau_1.$$

Здесь точка означает дифференцирование по ν_0, штрих — дифференцирование по ϱ. Подставив значение ν_2, полученное из второго уравнения (2.12), в первое, найдем, что τ_2 удовлетворяет уравнению вида

$$\dot\tau_2 = \nu_0^{-1}(\nu_0')^{-1}(p_0 + p_1\nu_0 + \ldots), \qquad (2.13)$$

в котором $4kQ_0p_0 = C_3^2(k^{-2}Q_0^{-2}C_3^2C_4^2 - C_6)$. Из уравнений (2.12) и (2.13) следует, что τ_2 и ν_2 представимы, с точностью до целых функций от ν_0, выражениями $\tau_2 = p_0(\nu_0')^{-1}\ln\nu_0 + \ldots$, $\nu_2 = -p_0\nu_0 C_3^{-1}(\nu_0')^{-1}\ln\nu_0 + \ldots$, используя которые совместно с решениями ν_0, τ_0 получим, с точностью до алгебраических функций от ν_0, значение $I_2(\Psi^1)$:

$$I_2(\Psi^1) = p_0(\nu_0')^{-2}[(\partial\Psi^1/\partial\tau_0) - \nu_0\tau_0^{-1}(\partial\Psi^1/\partial\nu_0)]\ln\nu_0.$$

Отсюда заключаем, что для существования алгебраического интеграла Ψ^1 необходимо, чтобы постоянные C_3, C_4, C_6, определяющие разложения переменных ν и τ в ряды по λ, соответствующих Ψ^1 и указанному способу введения λ, удовлетворили хотя бы одному из соотношений вида

1. $k^2Q_0^2C_6 - C_3^2C_4^2 = 0$ (2.14)
2. $C_3 = 0$,

когда ν_2 и ν_2' как функции ϱ обращаются в бесконечность, или же чтобы функция Ψ_0^1 имела структуру

$$\Psi_0^1 = \Psi_0^1(\varrho, kQ_0\varrho + \nu_0\tau_0). \tag{2.15}$$

Проведенные вычисления теряют силу при $kQ_0 = 0$, так как в этом случае замена независимой переменной ϱ на ν_0 становится невозможной.

Окончательно можно сделать следующее утверждение: необходимыми условиями существования частного алгебраического интеграла уравнений (2.1) при выборе ветви решений, соответствующей отрицательному знаку в выражении для производной $d\nu\, d\varrho^{-1}$, являются или равенство нулю постоянной площадей ($Q_0 = 0$ есть подслучай варианта интегрируемости Вольтерра), либо такие значения начальных данных решений (2.1), что при двух различных λ-преобразованиях выполняется по крайней мере одна комбинация из трех условий, получаемая из пар (2.5), (2.6); (2.9), (2.10); (2.14), (2.15).

Рассмотрим теперь второе многообразие решений и вернемся к уравнениям (2.2). Решениями уравнений (2.3) будут $\tau_0 = C_7\nu_0^2 + am_1^2$, $\varrho = 3^{-1}k^{-1}Q_0^{-1}C_7\nu_0^3 + C_8$. Здесь, как повсюду, C_i $(i = 7, 8)$ обозначают произвольные постоянные интегрирования. Заменив независимую переменную ϱ на ν_0, получим для определения ν_1 и τ_1 следующую систему, исходя из (2.2):

$$kQ_0C_7^{-1}\nu_0^{-1}\, d\tau_1 d\nu_0^{-1} + 2kQ_0\nu_0^{-1}\,\nu_1 - kQ_0C_7^{-1}\,\nu_0^{-2}\,\tau_1 - kQ_0 d\nu_1 d\nu_0^{-1} =$$
$$= 2kQ_0\nu_0^{-1}\,\varrho^2 + 2am_1Q_0kC_7^{-1}\,\nu_0^{-2}\,\varrho + \varrho(h - \tau_0)$$
$$2(d\nu_0)^2(d\varrho)^{-2}d\nu_1 d\varrho^{-1} = -2k^2Q_0^2C_7^{-3}\,\nu_0^{-6}\,\tau_1 + k^2Q_0^2C_7^{-4}\,\nu_0^{-8}\,\{\nu_0(k_2\tau_0 + a_0) +$$
$$+ 2b_1\varrho\tau_0 + 2c_1\varrho - C_7^2\nu_0^4([Q_0^2 - (\tau_0 - h)^2]\nu_0 + 2kQ_0\varrho(\tau_0 - h))\}.$$

Введем вместо τ_1 переменную $v = C_7^{-1}\nu_0^{-1}\tau_1$, что позволит составить из написанных выше уравнений для ν_1 и v систему Коши—Эйлера:

$$d\nu_1 d\nu_0^{-1} + \nu_0^{-1}v = \Phi_1(\nu_0)$$
$$2\nu_1\nu_0^{-1} + dv(d\nu_0)^{-1} + v\nu_0^{-1} = \Phi_1(\nu_0) + k^{-1}Q_0^{-1}f_1(\nu_0). \tag{2.16}$$

Здесь обозначено:

$$\Phi_1(\nu_0) = -2k^{-2}Q_0^{-2}\{[Q_0^2 - (\tau_0 - h)^2]\nu_0 + 2kQ_0\varrho(\tau - h)\} +$$
$$+ 2^{-1}C_1^{-2}\nu_0^{-4}[\nu_0(k_2\tau_0 + a) + 2\varrho(b_1\tau_0 + c_1)]\}$$
$$f_1(\nu_0) = 2kQ_0\nu_0^{-1}\varrho^2 + 2am_1C_1^{-1}\nu_0^{-2}kQ_0\varrho + (h - \tau_0)\varrho.$$

Характеристическое уравнение системы (2.16) имеет корни $s_1 = -2$, $s_2 = 1$, так что общее решение системы (2.16) можно записать в виде

$$\nu_1 = -\eta\nu_0^{-2} + 2\zeta\nu_0,\ \tau_1(C_1\nu_0)^{-1} = -2\eta\nu_0^{-2} - 2\zeta\nu_0. \tag{2.17}$$

где η и ζ — функции, подлежащие определению из (2.16). Для $I_1(\Psi_2) = \nu_1(\partial\Psi_{20}/\partial\nu_0) + \tau_1(\partial\Psi_{20}/\partial\tau_0)$ из (2.17) получим значение $I_1 = -6C_7\zeta(\partial\Psi_{20}/\partial C_7)$, в котором производная D_7 составлена с учетом выражений постоянных C_7, C_8, получаемых из значений ν_0 и τ_0 как функций ϱ. Функция ζ, как явствует из (2.16) и (2.17), определяется уравнением

$$d\zeta(d\nu_0)^{-1} = 6^{-1}\nu_0^{-1}[\Phi_1 - k^{-1}Q_0^{-1}f^{+1}(\nu_0)].$$

Очевидно, что постоянная часть выражения в квадратных скобках определяет логарифмическую особенность функции ζ и устранить таковую можно, лишь потребовав обращения последней в нуль, а это равносильно на основании выражений $f_1(\nu_0)$ и $\Phi_1(\nu_0)$ равенству $3^{-1}C_8k^{-1}Q_0^{-1}(am_1^{+2} - h) = 0$ или же условию $C_7D_7 = 0$. Таким образом, для частных решений, принадлежащих второй ветви, справедливо утверждение, что для существования алгебраического частного интеграла уравнений (2.1) необходимо выполнение одного из условий, соответствующих λ-преобразованию вида

$$\begin{aligned} &1)\ C_7 = 0\\ &2)\ C_8 = 0\\ &3)\ h - am_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

или же Ψ_{20} имеет структуру $\Psi_{20}\{\varrho, [3kQ_0\varrho - (\tau_0 - am_1^2)\nu_0]\}$. (2.19)

Если ни одно из условий вида (2.18), (2.19) не выполняется для искомых частных решений, то необходимо положить $k = 0$, когда вычисления теряют силу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богоявленский А. А., Прикл. матем. и механика, **22**, вып. 5, 622—645 (1958).
2. Шифф П., Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, Матем. сб., **24**, вып. 2 (1903).
3. Кейс И. А., Вестн. Московск. ун-та. Матем., механика, сер. 1, № 1, 72 (1965).
4. Кейс И. А., Вестн. Московск. ун-та. Матем., механика, сер. 1, № 6, 62 (1963).
5. Husson Ed., Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys., 8, 119—152 (1906).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/X 1966

I. KEIS

ÜHE KINNISPUNKTIGA GÜROSTAADI LIIKUMISVÕRRANDITE ERI INTEGRAALIDEST

Artiklis antakse menetlus Volterra, Lagrange'i, Hessi, Grioli ja Bobileffi integreerimisjuhtude eksisteerimiseks tarvilike tingimuste määramiseks. Esitatakse ka Bobileffi integreerimisjuhu üldistus. Valemitega (2.5), (2.6), (2.9), (2.10), (2.14), (2.18), (2.19) antakse rida tarvilikke tingimusi peateljel asuva raskuskeskmega gürostaadi jaoks.

I. KEIS

ON SOME PARTIAL INTEGRALS OF THE EQUATIONS CORRESPONDING TO THE MOTION OF A HEAVY GYROSTAT AROUND A FIXED POINT

The paper presents a method of defining some necessary conditions for the existence of the known cases of integration like those of Volterra, Lagrange, Hess, Grioli, Bobileff (and extrapolating the latter mentioned). Several necessary conditions concerning gyrostate with its centre of mass belonging to primary axis are described in the formulae (2.5), (2.6), (2.9), (2.10), (2.14), (2.18), (2.19).