EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.3.04

И. МАУЭР

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ УНИФИКАЦИИ

В работе рассматривается одна задача целочисленного линейного программирования с неоднородным разрывным целевым функционалом и предложены некоторые приближенные, удобные для практического применения методы для ее решения.

Постановка задачи

Рассмотрим описанную в [1] задачу оптимальной унификации.

Предполагается, что требуются изделия типа T_j $(j=1,\ldots,n)$ соответственно в количестве t_j (t_j — целое число, $j=1,\ldots,n$), причем возможна замена типа T_j типами T_i $(i=j+1,\ldots,n)$. Принято, что суммарные расходы изготовления изделия типа T_j зависят гиперболически от производимого его количества $y_j>0$, то есть

$$c_j(y_j)=a_j+b_j/y_j, \tag{1}$$

где a_j, $b_j>0$ — постоянные, а при $y_j=0$ расходы равны нулю $(j=$ $=1,\ldots,n)$.

Задача заключается в определении такого плана производства изделий $y=(y_1,\ldots,y_n)$ при выполнении всех потребностей в них непосредственно или с заменой, чтобы суммарные производственные затраты были минимальны. Разумеется, требуется целочисленность и неотрицательность плана.

Рассмотрим задачу в следующей математической формулировке: найти вектор, который минимизирует функционал

$$f(y)=\sum_{j=1}^{n}\pi_j(y_j)y_j \tag{2}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n}y_j=\sum_{j=1}^{n}t_j\\
\sum_{j=i}^{n}y_j\geqslant\sum_{j=i}^{n}t_j \qquad (i=2,\ldots,n)\\
y_j\geqslant 0 \qquad (j=1,\ldots,n),
\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\pi_j(y_j) = \begin{cases} c_j(y_j), \text{ если} & y_j > 0 \\ 0 \ , \text{ если} & y_j = 0 \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

В области $y > 0$ функционал $f(y)$ непрерывен и линеен, а в точках, где хотя бы один компонент $y_j = 0$, функционал прервется.

Как выясняется, задача (2)—(3) имеет только целочисленные решения.

Сведение задачи к непрерывному случаю

Предположим, что затраты (1) даны с точностью $\delta \geqslant 0$, причем допустимая их точность $\delta + \gamma$ $(\gamma > 0)$. Заменяем задачу (2)—(3) следующей задачей:

найти вектор, который минимизирует функционал

$$F(y) = \sum_{j=1}^{n} c_i(y_i + \gamma^*) y_j \tag{2'}$$

при ограничениях (3). Задача (2′)—(3) с достаточной точностью аппроксимирует задачу (2)—(3), если скаляр $\gamma^* > 0$ выполняет $\max\limits_j |c_j(y_j + \gamma^*) - c_j(y_j)| < \gamma$ для всех $y_i \geqslant t_i$ $(j = 1, \ldots, n)$. Решая непрерывную задачу (2′)—(3) с точностью $\varepsilon < \gamma^*$, получаем одновременно и с определенной точностью решение дискретной задачи (2)—(3).

Полученное решение целочисленное.

Действительно, на многограннике D, определенном ограничениями (3), функционал $F(y)$ строго вогнутый. Поэтому, как известно, $F(y)$ принимает наименьшее значение на D только в вершинах (или в одной вершине) последнего. Легко установить, что компоненты всех вершин многогранника D целочисленные.

Для решения задачи (2′)—(3) можно применить методы, разработанные для минимизации вогнутого функционала при линейных ограничениях. Известен, например, метод [2]. Однако для решения задачи (2)—(3) описанный способ может оказаться слишком трудоемким. Поэтому целесообразно разработать специальные методы решения, в которых учитываются особенности ограничений поставленной задачи.

Некоторые приближенные методы для решения исходной задачи

На основе непрерывной задачи (2′)—(3) можно утверждать, что $f(y)$ принимает наименьшее значение на многограннике D в вершинах (или в одной вершине) последнего.

Действительно, пусть $f(\hat{y}) = \min\limits_k f(y^k)$, где y^k $(k = 1, \ldots, 2^{n-1})$ — все вершины многогранника D. Предположим, что существует точка $y^* \in D$ такая, что $f(y^*) < f(\hat{y})$. Для задачи (2′)—(3) можно выбрать $\gamma^* > 0$ и $0 < \varepsilon < \gamma^*$ столь малыми, что решение задачи (2′)—(3), вершина $\tilde{y}$, решает задачу (2)—(3) с точностью $\varepsilon^* < f(\hat{y}) - f(y^*)$, так что минимальное значение $f(y)$ на D принадлежит промежутку $(f(\tilde{y}) - \varepsilon^*, f(\tilde{y}) + \varepsilon^*)$. Но $f(y^*) < f(\tilde{y}) - \varepsilon^*$, так как $f(\hat{y}) \leqslant f(\tilde{y})$. Следовательно, такой точки y^* на многограннике не существует и $f(\hat{y}) \leqslant f(y)$ для всех $y \in D$.

Компоненты вершин многогранника D легко выписываются. Они целочисленные и имеют специальную структуру. Пользуясь полученным таким образом сведением о структуре решения $\hat{y}$, построим некоторые приближенные методы для решения задачи (2)—(3).

Дадим математическое изложение этих методов.

Выбираем начальным решением $y^0 = (t_1, \ldots, t_n)$. Если после k-й итерации мы получаем $y^k = (y_1^k, \ldots, y_n^k)$, то $k+1$-я итерация состоит в следующем:

а) Определяем

$$\max_{j \in I(k)} \Delta_j^k = \Delta_r^k.$$

Здесь $I(k) = \{j : y_j^k > 0\}$ и

$$\Delta_j^k = c_j(y_j^k) y_j^k + c_{j_t}(y_{j_t}^k) y_{j_t}^k - c_{j_t}(y_j^k + y_{j_t}^k)(y_j^k + y_{j_t}^k) = (a_j - a_{j_t})\, y_j + b_j,$$

где j_t — индекс первого $y_l^k > 0$ $(l = j+1, \ldots, n)$. Если такого индекса j_t нет, то считаем $\Delta_j^k = 0$.

Если $\Delta_r^k > 0$, то

$$y_j^{k+1} = \begin{cases} y_j^k, & \text{если } j \neq r, r_t \\ 0, & \text{если } j = r \\ y_r^k + y_{r_t}^k, & \text{если } j = r_t. \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Если $\Delta_r^k = 0$, то получено приближенное решение.

б) Определяя Δ_j^k, как в а), выберем

$$\max_{I^*(k)} c_j(y_j^k) = c_r(y_r^k),$$

где $I^*(k) = \{j : y_j^k > 0,\ \max(\Delta_{j_s}^k, \Delta_j^k) > 0\}$. Здесь j_s — индекс последнего $y_l^k > 0$ $(l = 1, \ldots, j-1)$. Если такого индекса нет, то $\Delta_{j_s}^k = 0$.

Если $\max(\Delta_{r_s}^k, \Delta_r^k) = \Delta_{r_s}^k > 0$ или

$$\max(\Delta_{r_s}^k, \Delta_r^k) = \Delta_r^k > 0 \text{ (и в случае } \Delta_r^k = \Delta_{r_s}^k > 0),$$

то

$$y_j^{k+1} = \begin{cases} y_j^k, & \text{если } j \neq r_s, r \\ 0, & \text{если } j = r_s \\ y_r^k + y_{r_s}^k, & \text{если } j = r \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

или

$$y_j^{k+1} = \begin{cases} y_j^k, & \text{если } j \neq r, r_t \\ 0, & \text{если } j = r \\ y_r^k + y_{r_t}^k, & \text{если } j = r_t. \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

соответственно.

Процесс решения заканчивается, когда множество $I^*(k)$ окажется пустым.

в) Сравниваем значения $c_{k+1}(y^k_{k+1})$ и $c_{k+2}(y^k_{k+1}+y^k_{k+2})$. Если $c_{k+1}(y^k_{k+1})>c_{k+2}(y^k_{k+1}+y^k_{k+2})$, то

$$y_j^{k+1}=\begin{cases} y_j^k\ , & \text{если } j\neq k+1,\ k+2 \\ 0\ , & \text{если } j=k+1 \\ y^k_{k+1}+y^k_{k+2}\ , & \text{если } j=k+2. \end{cases}\qquad (j=1,\ldots,n)$$

А при $c_{k+1}(y^k_{k+1})\leqslant c_{k+2}(y^k_{k+1}+y^k_{k+2})$ $\quad y^{k+1}=y^k$.

После $n-1$ шагов получаем решение $y\uparrow$.

И аналогично сверху. Если $c_{n-k}(y^k_{n-k})>c_t(y^k_t+y^k_{n-k})$, где t — индекс первого $y^k_j>0$ $(j=n-k+1,\ldots,n)$, то

$$y_j^{k+1}=\begin{cases} y_j^k\ , & \text{если } j\neq n-k,\ t \\ 0\ , & \text{если } j=n-k \\ y^k_{n-k}+y^k_t\ , & \text{если } j=t. \end{cases}\qquad (j=1,\ldots,n)$$

А при $c_{n-k}(y^k_{n-k})\leqslant c_t(y^k_t+y^k_{n-k})$ $\quad y^{k+1}=y^k$.

Полученное решение $y\downarrow$ сравниваем с $y\uparrow$ и выбираем то, для которого значение $f(y)$ меньше.

Следует отметить, что при составлении описанных методов некоторые особенности структуры $f(y)$ остались неиспользованными. Поэтому эти методы применимы, например, и при решении всех задач минимизации на многограннике D, в которых целевой функционал на D вогнутый и имеет определенную сепарабельную структуру.

Пример практического применения методов

При помощи этих методов была решена задача унификации железобетонных изделий, поставленная Институтом экономики АН ЭССР. Результаты вычислений показывают, что замена двадцати рассмотренных типов изделий пятью из них снижает производственные затраты на 10% по сравнению с затратами без унификации.

Если вычисления неоднократные и отличаются от данных только значениями t_j $(j=1,\ldots,n)$, то целесообразно использовать графики функций $u=c_j(v)v$ и $u=c_j(v)$ $(j=1,\ldots,n;\ v>0)$ и сравнение методов провести графически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эннусте Ю., Экономика строительства, № 10, 71—73 (1963).
2. Хоанг Туй, Докл. АН СССР, **159**, № 1, 32—35 (1964).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/XI 1966

I. MAUER

OPTIMAALSEST UNIFITSEERIMISE ÜLESANDEST

Artiklis antakse uurimuses [1] püstitatud raudbetoondetailide unifitseerimise ülesandele matemaatiline formuleering ning esitatakse mõned ligikaudsed meetodid selle ülesande lahendamiseks.

I. MAUER

ON THE PROBLEM OF OPTIMAL UNIFICATION

The paper contains a mathematical formulation of the problem of the unification of reinforced concrete items, stated in [1], and some practical approximation methods for solving the problem.