EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.3.03

Э. РАЙК

МЕТОДЫ ФЕЙЕРОВСКОГО ТИПА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Нахождение общей точки выпуклых множеств

Пусть в гильбертовом пространстве H даны выпуклые замкнутые множества $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ такие, что пересечение $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i \neq \varnothing$, тогда для нахождения некоторой точки пересечения Q можно поступить следующим образом.

Задаемся начальным приближением x^0 и строим последовательность x^n по рекуррентной формуле

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n (P_k x^n - x^n), \tag{1.1}$$

где $P_k x^n$ — проекция точки x^n на множество Q_k, а $k = n \pmod m + 1$

$$0 < \alpha \leqslant \lambda_n \leqslant \beta < 2.$$

Тогда для любых $x \in Q$ выполняется неравенство $\|x - x^{n+1}\| \leqslant \|x - x^n\|$, т. е. последовательность (1.1) является фейеровской относительно множества Q.

В конечномерном пространстве последовательность (1.1) сходится к некоторой точке пересечения $x^* \in Q$ [1]. В бесконечномерном случае для доказательства сходимости x^n требуются дополнительные предположения, например $Q_1 \cap \bigcap_{i=2}^{m} Q_i^0 \neq \varnothing$ [2] (Q_i^0 означает внутренние точки множества Q_i). Это дополнительное требование можно заменить более общим, а именно — потребовать, чтобы множества Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ образовывали корректную систему множеств в том смысле, что из $\varrho(x^n, Q_i) \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ следует $\varrho(x^n, Q) \to 0$ (см. приложение).

Для случая, если множества Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ задаются неравенствами $g_i(x) \leqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где $g_i(x)$ — дифференцируемые и выпуклые функционалы, И. Ереминым предложен другой метод построения фейеровской последовательности [3].

Согласно этому методу последовательность x^n определяется как

$$x^{n+1} = x^n - \frac{g_k(x^n)_+}{\|g_k'(x^n)\|^2} g_k'(x^n), \tag{1.2}$$

где

$$k = n \pmod m + 1$$

$$g_k(x^n)_+ = \max(0, g_k(x^n))$$

или

$$x^{n+1} = x^n - \frac{g(x^n)}{\|g'(x^n)\|^2} g'(x^n), \text{ где } g(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x)_+. \qquad (1.2')$$

Для решения системы линейных равенств аналогичный метод был предложен еще У. Хартом и Т. Моцкиным [4].

В конечномерном пространстве последовательность (1.2) сходится [3, 4]. Для доказательства сходимости в общем случае требуется дополнительное определение. Назовем ограничение $g(x) \leqslant 0$, задающее множество $Q = \{x : g(x) \leqslant 0\}$, корректным, если из того, что $g(x^n) \to +0$, следует $\varrho(x^n, Q) \to 0$ (см. приложение и [5]).

Теорема 1. *Если в любой ограниченной области*

1) $g_i(x)$ — *выпуклы и дифференцируемы,*
2) $g_i(x) \leqslant 0$ *как ограничения корректны,*
3) *система множеств* Q_i — *корректная,*
4) $\|g_i'(x)\|$ — ограничены $(i = 1, 2, \ldots, m)$,

то последовательность (1.2) *сходится к* $x^* \in Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$.

Доказательство. Заметим, что множества Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ выпуклы и замкнуты как множества, заданные выпуклыми и непрерывными функционалами $g_i(x)$. Тогда и множество $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ выпукло и замкнуто.

В силу выпуклости функции $g_k(x)$ имеем при $x^n \overline{\in} Q_k$ для любого $x \in Q_k$, а следовательно, и $x \in Q$

$$(x - x^n, g_k'(x^n)) \leqslant g_k(x) - g_k(x^n) \leqslant -g_k(x^n) < 0,$$

а также $(x - x^{n+1}, g_k'(x^n)) = \left(x - x^n + \frac{g_k(x^n)_+}{\|g_k'(x^n)\|^2} g_k'(x^n), g_k'(x^n)\right) =$

$$= (x - x^n, g_k'(x^n)) + g_k(x^n)_+ \leqslant -g_k(x^n) + g_k(x^n)_+ = 0.$$

Имеем

$$(x - x^{n+1}, x^{n+1} - x^n) = -\frac{g_k(x^n)_+}{\|g_k'(x^n)\|^2} (x - x^{n+1}, g_k'(x^n)) \geqslant 0. \qquad (1.3)$$

Согласно свойствам скалярного произведения для любого $x \in Q$

$$\|x - x^n\|^2 = \|x - x^{n+1}\|^2 + \|x^{n+1} - x^n\|^2 + 2(x - x^{n+1}, x^{n+1} - x^n),$$

откуда по (1.3) следует $\|x - x^{n+1}\| \leqslant \|x - x^n\|$, т. е. фейеровость относительно множества Q. Из фейеровости последовательности (1.2) следует ее ограниченность.

Выбрав в качестве x проекцию точки x^n на множество Q и обозначив ее через Px^n, получим

$$[\varrho(x^{n+1}, Q)]^2 = \|Px^{n+1} - x^{n+1}\|^2 \leqslant \|Px^n - x^n\|^2 - \|x^n - x^{n+1}\|^2 =$$

$$= [\varrho(x^n, Q)]^2 - \|x^n - x^{n+1}\|^2. \qquad (1.4)$$

Расстояния $\varrho(x^n, Q)$ образуют монотонно невозрастающую ограниченную снизу последовательность, которая, следовательно, сходится: $\varrho(x^n, Q) \to \varrho \geqslant 0$. А в таком случае из (1.4) получаем, что $\|x^n - x^{n+1}\| \to 0$. Но

$$\|x^{n+1} - x^n\| = \| \frac{g_k(x^n)_+}{\|g_k'(x^n)\|^2} g_k'(x^n) \| = \frac{g_k(x^n)_+}{\|g_k'(x^n)\|} \geqslant \frac{g_k(x^n)_+}{c}, \qquad (1.5)$$

где $c = \sup_{x \in R} \|g'_k(x)\|$, $R = \{x : \|Px^0 - x\| \leqslant \|Px^0 - x^0\|\}$, а x^0 — начальное приближение.

Из неравенства (1.5) получаем $g_k(x^n)_+ \to 0$; но тогда в силу корректности ограничения $\varrho(x^n, Q_k) \to 0$ для любого множества Q_k. Система множеств Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ является корректной, следовательно, и $\varrho(x^n, Q) \to 0$.

Докажем теперь, что фейеровская последовательность x^n относительно множества Q с дополнительным условием $\varrho(x^n, Q) \to 0$ сходится к $x^* \in Q$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N_0 такое, что для любого $n \geqslant N_0$ $\|x^n - Px^{N_0}\| \leqslant \varepsilon$; для $\frac{\varepsilon}{2}$ выберем N_1 такое, что для любого $n \geqslant N_1$ $\|x^n - Px^{N_1}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; аналогично для $\frac{\varepsilon}{4}$ и т. д.

Обозначив множество $S_0 = \{x : \|x - Px^{N_0}\| \leqslant \varepsilon\}$, $S_1 = \{x : \|x - Px^{N_1}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\}$, получим, что $F_1 = S_0 \cap S_1 \neq \varnothing$. Множество F_1 содержит по крайней мере все члены последовательности, начиная с x^{N_1}, и точку Px^{N_1}. Продолжая процесс, получаем последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств $F_k \supset F_{k+1}$

$$F_k = \bigcap_{i=0}^{k} S_i \subset S_k,$$

где радиус замкнутого шара S_k равен $\frac{\varepsilon}{2^k}$ и стремится к нулю, а каждое множество F_k содержит точку Px^{N_k} и точки последовательности x^n, начиная с x^{N_k}. В силу полноты пространства H $x^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, а $x^n \to x^*$, но тогда и $Px^{N_k} \to x^{**}$; $x^* = x^{**} \in Q$, так как $\|x^n - Px^n\| \to 0$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 1. Метод Еремина, описанные ниже метод Еремина—Мазурова и теорема 2 обобщаются и для недифференцируемых непрерывных функционалов. При этом все доказательства и рассуждения переносятся дословно. Только под $g_k'(x^n)$ следует понимать любой опорный функционал к функционалу $g_k(x)$ в точке x^n.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 справедлива и для последовательности, определяемой по формуле (1.2′), а также и для последовательности

$$x^{n+1} = x^n - \lambda_n \frac{g_k(x^n)_+}{\|g_k'(x^n)\|^2} g_k'(x^n),$$

где $0 < \alpha \leqslant \lambda_n \leqslant \beta < 2$.

Если множества, на которые мы умеем проектировать, составляют только часть их общего числа, то последовательность x^n следует строить, применяя как формулу (1.1), так и формулу (1.2).

2. Решение экстремальных задач

Рассмотрим сначала задачу для нахождения безусловного экстремума.

В гильбертовом пространстве H дан выпуклый и дифференцируемый функционал $f(x)$, достигающий своего минимума f^*. Определим минимизирующую последовательность

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n) - f^*}{\|f'(x^n)\|^2} f'(x^n). \qquad (2.1)$$

Если функционал $f(x) - f^*$ рассматривать как ограничение, задающее множество $Q = \{x : f(x) - f^* \leqslant 0\}$, то верна

Теорема 2. *Если в любой ограниченной области ограничение $f(x) - f^* \leqslant 0$ корректно, а $\|f'(x)\| < c < \infty$, то последовательность (2.1) сходится к $x^* \in Q$.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из теоремы 1, если число множеств m принять равным единице.

Замечание 3. В конечномерном пространстве R^n для любой выпуклой дифференцируемой функции, определенной во всем пространстве и достигающей своего минимума, условия теоремы 2 всегда выполнены. Следовательно, последовательность (2.1) в R^n сходится.

Теорема 2 представляет интерес, потому что не любая минимизирующая последовательность для данной задачи сходится, и именно для подобных задач были предложены методы регуляризации.

Непрерывный вариант метода (2.1) предложен в работе [6].

Перейдем к рассмотрению экстремальной задачи на условный минимум. Требуется найти минимум выпуклого дифференцируемого функционала $f(x)$ на пересечении выпуклых замкнутых множеств $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$, $Q_i = \{x : g_i(x) \leqslant 0\}$. Если функционал $f(x)$ достигает своего минимума f^* на множестве Q и нам известно минимальное значение f^*, то эта задача сводится к задаче предыдущего параграфа. Будем искать некоторую общую точку выпуклых замкнутых множеств Q_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, m$), где множество $Q_0 = \{x : f(x) \leqslant f^*\}$. Пересечение этих множеств $M = \bigcap_{i=0}^{m} Q_i$ состоит из точек минимума, т. е. для любого $x \in M$ $f(x) = f^*$.

Для случая, когда значение f^* не известно, И. Ереминым и В. Мазуровым был предложен следующий метод [7]. Рассмотрим функционал $g(x) = \max_i g_i(x)$, который задает множество $Q = \{x : g(x) \leqslant 0\}$. Если выполнены условия теоремы 1, то из $g(x^n) \to 0$ следует $\varrho(x^n, Q) \to 0$.

По методу Еремина—Мазурова при произвольном начальном приближении x^0 строят фейеровскую последовательность [для определенности по формуле (1.2)] относительно множества Q. При этом из некоторых точек последовательности x^{n_j} совершают шаг по антиградиенту функционала $f(x)$

$$x^{n_j+1} = x^{n_j} - \lambda_j \frac{f'(x^{n_j})}{\|f'(x^{n_j})\|}, \qquad (2.2)$$

где n_j — натуральное число, выбираемое тем или иным способом для каждого j. Здесь n_j определяется из условия $g(x^{n_j}) < \lambda_j$, $0 < \lambda_i \leqslant \lambda_0$, $\lambda_j \to 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j = \infty$. Если выполнены условия теоремы 1, то такое число n_j существует.

В работе [7] доказано, что для последовательности (1.2), (2.2) в конечномерном пространстве для линейной функции $f(x)$ расстояние $\varrho(x^n, M) \to 0$, где $M = \{x : f(x) = f^*, \ x \in Q\}$.

Исследуем метод в более общем случае.

Теорема 3. *Пусть выпуклый и дифференцируемый функционал $f(x)$ достигает своего минимума f^* на пересечении выпуклых множеств $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$. Если $g_i(x)$ выпуклы и дифференцируемы, ограничения $g_i(x) \leqslant 0$ корректны, система множеств Q_i корректна, $\|g_i'(x)\|$ ограничены $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\lambda_j \to 0$, $\lambda_j > 0$ и $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j = \infty$, то $\varrho(x^n, Q) \to 0$ и существует такая подпоследовательность x^{n_s}, что $f(x^{n_s}) \to f^*$.*

Доказательство. Выполнены условия теоремы 1 и, следовательно, для λ_j существует n_j такое, что $g(x^{n_j}) = \max_i g_i(x^{n_j}) \leqslant \lambda_j$. В силу корректности ограничений и корректности систем множеств $\varrho(x^{n_j}, Q) \to 0$. Заметим, что для элементов последовательности x^n, определяемых из (1.2), $\varrho(x^{n+1}, Q) \leqslant \varrho(x^n, Q)$, а для элементов, определяемых из (2.2), $\varrho(x^{n_j+1}, Q) \leqslant \varrho(x^{n_j}, Q) + \lambda_j$. Из того, что $\lambda_j \to 0$ и $\varrho(x^{n_j}, Q) \to 0$, следует, что $\varrho(x^n, Q) \to 0$.

Покажем, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} f(x^n) \geqslant f^*$. Рассмотрим некоторую точку минимума $\bar{x} \in M$. Тогда в силу выпуклости $f(x)$ и выпуклости Q

$$f(x^n) \geqslant f^* + (f'(\bar{x}), x^n - \bar{x}) \geqslant f^* - \|f'(x^n)\| \varrho(x^n, Q),$$

т. е. в пределе

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f(x^n) \geqslant f^*. \tag{2.3}$$

Осталось доказать, что найдется подпоследовательность x^{n_s}, для которой $\overline{\lim}_{s\to\infty} f(x^{n_s}) \leqslant f^*$. Допустим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f(x^n) \geqslant f^* + \varepsilon$ для любого $n \geqslant N_\varepsilon$. В силу непрерывности $f(x)$ можно указать $\delta > 0$ такое, что $f(x) \leqslant f^* + \varepsilon$ для тех x, для которых $\|x - \bar{x}\| \leqslant \delta$. Для точек, определяемых из (1.2),

$$\|x^{n+1} - \bar{x}\|^2 \leqslant \|x^n - \bar{x}\|^2, \tag{2.4}$$

а для точек, определяемых из (2.2),

$$\|x^{n+1} - \bar{x}\|^2 = \|x^{n+1} - x^n + x^n - \bar{x}\|^2 =$$
$$= \|x^n - \bar{x}\|^2 + \|x^{n+1} - x^n\|^2 + 2(x^{n+1} - x^n, x^n - \bar{x})$$
$$(x^{n+1} - x^n, x^n - \bar{x}) = -\left(x^{n+1} - x^n, \bar{x} - x^n - \delta \frac{x^{n+1} - x^n}{\|x^{n+1} - x^n\|}\right) -$$
$$-\left(x^{n+1} - x^n, \delta \frac{x^{n+1} - x^n}{\|x^{n+1} - x^n\|}\right) \leqslant -\delta \|x^{n+1} - x^n\|.$$

В итоге, помня, что по (2.2) $\|x^{n_j+1} - x^{n_j}\| = \lambda_j$, имеем

$$\|x^{n_j+1} - \bar{x}\|^2 \leqslant \|x^{n_j} - \bar{x}\|^2 + \lambda_j^2 - 2\delta\lambda_j. \tag{2.5}$$

Выбирая N так, что $\lambda_j \leqslant \delta$ для $n_j \geqslant N$, и складывая соответственно неравенства (2.4) и (2.5), получим

$$0 \leqslant \|x^{n_m} - \bar{x}\|^2 \leqslant \|x^{n_l} - \bar{x}\|^2 + \sum_{j=l}^{m} \lambda_j(\lambda_j - 2\delta) \leqslant \|x^{n_l} - \bar{x}\|^2 - \delta \sum_{j=l}^{m} \lambda_j.$$

Это неравенство должно быть удовлетворено для любого m. Но это противоречит тому, что ряд $\sum \lambda_j$ расходится. Учитывая неравенство (2.3), получаем, что существует такая подпоследовательность x^{n_s}, что $\lim\limits_{s\to\infty} f(x^{n_s}) = f^*$. Утверждать сходимость $\varrho(x^n, M) \to 0$, как это сделано в работе [7], в данном случае, вообще говоря, нельзя.

Выясним этот вопрос подробнее.

Рассмотрим задачу минимизации на множестве Q функционала $f(x)$, который достигает минимума на множестве $M \subset Q$. Пусть дана последовательность x^n такая, что $\varrho(x^n, Q) \to 0$ и $f(x^n) \to f^* = \inf\limits_{x \in Q} f(x)$. В литературе такую последовательность называют обобщенной минимизирующей последовательностью — о. м. п. [5].

Теорема 4. *Пусть дана о. м. п.; тогда, если выполнено одно из условий:*

а) *пространство конечномерно, Q ограничено, $f(x)$ — непрерывная функция;*

б) *пространство конечномерно, $f(x)$ — непрерывная функция и множество $Q_{1\varepsilon} = \{x : f(x) - f^* \leqslant \varepsilon\}$ ограничено для некоторого $\varepsilon > 0$;*

в) *пространство конечномерно, $f(x)$ — выпуклая функция, Q выпукло и M ограничено;*

г) *$f(x)$ линейный функционал, а Q задается конечным числом линейных неравенств или равенств,*

то $\varrho(x^n, M) \to 0$.

Доказательство. Множества $Q_1 = \{x : f(x) - f^* \leqslant 0\}$ и Q пересекаются по множеству $M = Q \cap Q_1$. Пусть выполнено одно из условий а), б) или в). Тогда, как легко видеть, последовательность x^n ограничена. Но непрерывная функция в ограниченной области конечномерного пространства дает корректное ограничение, следовательно, из $f(x^n) \to f^*$ следует $\varrho(x^n, Q_1) \to 0$.

В рассматриваемых случаях пересечение $Q_\varepsilon \cap Q_{1\varepsilon}$ ограничено, откуда следует корректность пары множеств Q и Q_1 (см. приложение), т. е. $\varrho(x^n, M) \to 0$.

Если выполнено условие г), то имеем $M = Q \cap Q_1$, где $Q_1 = \{x : f(x) - f^* \leqslant 0\}$. По условию 3 (см. приложение) система множеств Q, Q_1 корректна, откуда следует $\varrho(x^n, M) \to 0$.

Следствие. Если в теореме 3 дополнительно выполнено условие в) или условие г), то можем утверждать, что $\varrho(x^{n_s}, M) \to 0$.

В заключение автор благодарит Б. Т. Поляка за ценные замечания.

Приложение

Перечислим основные критерии корректных ограничений и корректных систем множеств.

Корректные ограничения [5]:

1) если пространство конечномерно, $g(x)$ непрерывен и $S=\{x: g(x)\leqslant\varepsilon\}$ ограничено для некоторого $\varepsilon>0$;

2) если $g(x)$ выпуклый, Q ограничено и существует x^0 такое, что $g(x^0)<0$;

3) если $g(x)$ выпуклый и $\|g'(x)\|\geqslant\varepsilon>0$ для всех x таких, что $g(x)=0$ (здесь $g'(x)$ означает произвольный опорный функционал к $g(x)$ в точке x);

4) если $g(x)$ дифференцируем, Q ограничено, $g'(x)$ удовлетворяет условию Липшица и существуют $\varepsilon>0$, $\delta>0$ такие, что $\|g'(x)\|\geqslant\varepsilon$ при $|g(x)|\leqslant\delta$;

5) если $g(x)\geqslant 0$ для всех x (т. е. $Q=\{x: g(x)=0\}$), $g(x)$ дифференцируем, $g'(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $\|g'(x)\|^2\geqslant\lambda g(x)$, $\lambda>0$;

6) если $g(x)$ равномерно выпуклый.

Корректные системы множеств [2, 8]:

1) пространство конечномерно и для некоторого $\varepsilon>0$ пересечение $\bigcap_{i=1}^{m} Q_{i\varepsilon}$ ограничено; здесь $Q_{i\varepsilon}=\{x:\|x-y\|\leqslant\varepsilon,\ y\in Q_i\}$;

2) пространство конечномерно, Q_i выпуклы и $\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ ограничено;

3) все Q_i задаются конечным числом линейных функционалов типа равенств и неравенств $(i=1, 2, \ldots, m)$;

4) Q_i выпуклы, $Q=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ ограничено, а $Q_1\cap\bigcap_{i=2}^{m} Q_i^0\neq\varnothing$;

5) все Q_i равномерно выпуклы, кроме, быть может, одного;

6) Q_α выпуклы, $Q_{\bar\alpha}$ ограничено, а $Q_{\bar\alpha}\cap\big(\bigcap_{\substack{\alpha\in A\\ \alpha\neq\bar\alpha}} Q_\alpha\big)^0\neq\varnothing$, где A — множество любой мощности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брегман Л. М., Докл. АН СССР, **162**, № 3, 487—490 (1965).
2. Гурин Л. Г., Поляк Б. Т., Райк Э. В., Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (1967) (в печати).
3. Еремин И. И., Докл. АН СССР, **160**, № 5, 994—996 (1965).
4. Hart W. L., Motzkin T. S., Pacific J. Math., **6**, No. 4, 691—707 (1956).
5. Левитин Е. С., Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, № 5, 787—823 (1966).
6. Альбер С. И., Альбер Я. И., Докл. АН СССР, **171**, № 6, 1247—1250 (1966).
7. Еремин И. И., Мазуров В. Д., Докл. АН СССР, **170**, № 1, 57—60 (1966).
8. Райк Э., Изв. АН ЭССР. Физ. * Матем., **16**, № 2 (1967).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6/IV 1967

E. RAIK

FEIERI TÜÜPI MEETODID HILBERTI RUUMIS

Hilberti ruumis H vaadeldakse kahte ülesannet: 1) leida mingi punkt kumerate hulkade ühisosal $Q=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$; 2) minimiseerida pidev ja kumer funktsionaal $f(x)$ hulgal Q. Uuritakse mõningaid iteratsioonimeetodeid, kus jada x^n on Feieri jada hulga Q suhtes, s. t. mistahes $x \in Q$ kehtib võrratus $\|x-x^{n+1}\| \leqslant \|x-x^n\|$. Täiendavate lisatingimuste olemasolu korral tõestatakse seda tüüpi jadade koonduvus.

E. RAIK

THE METHODS OF FEIER TYPE IN HILBERT SPACE

Two problems in Hilbert space are being considered: 1) finding a point in the intersection of given convex sets $Q=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$, 2) minimizing the given continuous and concave functional on the set Q. Two iteration methods are being discussed. In both cases the iteration sequence x^n is of Feier type with respect to set Q, i. e. for all $x \in Q$ are $\|x-x^{n+1}\| \leqslant \|x-x^n\|$. With the help of some additional restriction the convergence of the sequences is proved.