EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.3.01

Г. КАНГРО

О НЕКОТОРЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО ТЕОРИИ СУММИРУЕМОСТИ

Пусть X и Y — некоторые множества числовых последовательностей, а A — оператор (называемый методом суммирования), преобразующий множество X в Y. Обозначим через c множество всех сходящихся последовательностей, а через a — множество всех абсолютно сходящихся последовательностей (т. е. множество всех последовательностей $x=\{\xi_k\}$, при которых $\sum|\xi_k-\xi_{k-1}|<\infty$). Последовательность $x\in X$ называется суммируемой методом A или A-суммируемой (соответственно абсолютно суммируемой методом A или $|A|$-суммируемой), если $A(x)\in c$ (соответственно $A(x)\in a$). Множество всех A-суммируемых (соответственно $|A|$-суммируемых) последовательностей называется полем A-суммируемости (соответственно $|A|$-суммируемости) и обозначается через A^* (соответственно $|A|^*$). В случае $x\in A^*$ предел преобразованной последовательности $A(x)$ называется A-суммой последовательности x и обозначается через $\overline{A}(x)$. Метод A называется консервативным, если $A^*\supset c$, и регулярным, если, кроме того, $\overline{A}(x)=$ $=\lim\xi_k$ при всех $x=\{\xi_k\}\in c$.

Чаще всего в теории суммируемости применяются так наз. матричные методы суммирования, определяемые при помощи бесконечной числовой матрицы (a_{nk}) соотношением $A(x)=\{\eta_n\}$, где*

$$\eta_n=\sum_k a_{nk}\xi_k \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{1}$$

причем все ряды в правой части (1) предполагаются сходящимися.

Основная задача теории суммируемости — выяснить структуру полей A^* и $|A|^*$, а также соотношения между полями суммируемости разных методов суммирования и между соответствующими суммами последовательностей.

В настоящей статье дается обзор некоторых исследований, проведенных в Тарту начиная с 1964 г.** по следующим темам теории суммируемости:

1. Применение множителей суммируемости в теории ортогональных рядов.
2. Общая теория матричных методов суммирования.
3. Континуальные методы суммирования.

Над этими темами работали пять членов кафедры математического анализа Тартуского государственного университета (С. Барон, Г. Кангро, Э. Реймерс, М. Тыннов, Э. Юримяэ). Некоторые результаты (Кангро, Реймерс) публикуются в данной статье впервые.

* Символ $\sum\limits_k$ означает $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$.

** Систематические исследования по теории суммируемости в Тарту ведутся с 1952 г. Краткий обзор соответствующих результатов до 1964 г. изложен в [1, 2].

Применение множителей суммируемости в теории ортогональных рядов

Одним центральным вопросом теории суммируемости является вопрос о признаках A-суммируемости изучаемого ряда*. Для решения этого вопроса изучаемый ряд представляется в виде

$$\sum \varepsilon_n u_n, \tag{2}$$

причем предполагается известным, что ряд $\sum u_n$ суммируем некоторым методом B. Говорят, что $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность множителей суммируемости класса (B, A) (соответственно $(B, |A|)$), если ряд (2) является A-суммируемым (соответственно $|A|$-суммируемым) при каждом B-суммируемом ряде $\sum u_n$. Следовательно, ряд (2) A-суммируем, если $\{\varepsilon_n\} \in (B, A)$, и $|A|$-суммируем, если $\{\varepsilon_n\} \in (B, |A|)$. Эффективные необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости известны для некоторых более распространенных частных методов суммирования, в том числе для самого важного в применениях метода Чезаро C^α, определенного треугольной** матрицей с элементами

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}, \quad A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}$$

(см., напр., [3, 4]).

1. Известно, что (в противоположность обыкновенной сходимости) абсолютная сходимость тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sum A_n(t) \tag{3}$$

данной функции f не является локальным свойством функции f, т. е. не зависит только от поведения функции f в окрестности данной точки. Возникает вопрос, является ли абсолютная суммируемость ряда Фурье (3) или более общего ряда $\sum \lambda_n A_n(t)$ локальным свойством функции f. Так, например, Бозанке в 1936 г. доказал, что $|C^\alpha|$-суммируемость ряда (3) является локальным свойством функции f при $\alpha > 1$, а Бозанке и Кестельман показали в 1939 г., что $|C|$-суммируемость ($C = C^1$ — метод арифметических средних) ряда (3) уже не является локальным свойством функции f. Аналогичные результаты для некоторых других частных методов суммирования получили Идзуми, Моханти, Бхатт, Мацумото и Лал [5]. Более общий подход к решению проблемы о локальности абсолютной суммируемости ряда Фурье нашел Барон [6]. Из его исследований явствует, что $|A|$-суммируемость ряда $\sum \lambda_n A_n(t)$ является локальным свойством функции f, если числа λ_n — множители суммируемости класса $(E, |A|)$, где E — метод сходимости. Используя одну теорему Кангро [7] о множителях суммируемости класса $(|A|, |E|)$, Барон также устанавливает общее достаточное условие для того, чтобы $|A|$-суммируемость ряда (3)

* Ряд $\sum u_n$ называется A-суммируемым, если последовательность частных сумм этого ряда A-суммируема.

** Матрица (a_{nk}) называется треугольной, если $a_{nk} = 0$ при $k > n$.

не являлась локальным свойством функции f. В случае метода Чезаро C^α ($\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$) Барон доказывает, что если $\{\lambda_n\} \in a$ и

$$\sum (n+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} |\lambda_n| < \infty \qquad \text{при} \quad \operatorname{Re}\alpha < 1,$$

$$\sum (n+1)^{-1} \, |\lambda_n| < \infty \qquad \text{при} \quad \operatorname{Re}\alpha \geqslant 1,$$

то $|C^\alpha|$-суммируемость ряда $\sum \lambda_n A_n(t)$ является, а если

$$\sum (n+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} |\lambda_n| = \infty,$$

то не является локальным свойством функции f. Отсюда, в частности, вытекает, что $|C^\alpha|$-суммируемость ряда (3) не является локальным свойством функции f, если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Общие теоремы Барона содержат как частные случаи все известные до сих пор результаты о локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов (3) или $\sum \lambda_n A_n(t)$ (кроме первого результата Бозанке).

2. Одной из трудных проблем теории тригонометрических рядов является вопрос о том, как по свойствам коэффициентов a_n, b_n тригонометрического ряда (3) судить о том, является ли ряд (3) рядом Фурье (в известном смысле) некоторой функции f из данного класса. В 1923 г. Колмогоров доказал, что ряд косинусов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{4}$$

является рядом Фурье функции $f \in L$ (L — класс функций, интегрируемых в смысле Лебега), если $\{a_n\} \in (C_o, C)$ (C_o — класс всех последовательностей x, для которых $C(x)$ ограничена). В 1933 г. Мур и в 1934 г. Чезари установили, что утверждение Колмогорова остается верным, если $\{a_n\} \in (C_o^\alpha, C^\alpha)$ при некотором $\alpha > 0$. В 1960 г. немецкий математик Гёс [8], применяя теорию множителей суммируемости, передоказал теорему Мура и Чезари (Колмогоров, а также Мур и Чезари понятия о множителях суммируемости явно не использовали). Гёс также показал, что ряд (4) является рядом Фурье—Стилтьеса, если $\{a_n\} \in (C^\alpha, C^\alpha)$ при $\alpha > 0$. Кроме того, он нашел некоторые аналогичные результаты, относящиеся к ряду (4) и к ряду синусов

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{5}$$

в случае $\alpha = 0$ (C^0 — метод сходимости E).

Соотношения между множителями суммируемости и коэффициентами Фурье подвергались подробному исследованию Тынновым [9–11]. Он, в частности, показал, что если A — регулярный метод, который равномерно суммирует ряды Фурье всех 2π-периодических непрерывных функций, а B — произвольный регулярный метод, то из $\{a_n\} \in (A_o, B)$ следует, что ряд (4) является рядом Фурье функции $f \in L$, а из $\{a_n\} \in (A, B)$, что ряд (4) является рядом Фурье—Стилтьеса. Если же $\{nb_n\} \in (A_o, B)$, то ряд (5) является рядом Фурье абсолютно непрерывной функции, а если $\{nb_n\} \in (A, B)$, то — рядом Фурье функции с ограниченным изменением.

При изучении вопроса о принадлежности рядов (4) или (5) к определенным классам рядов Фурье важную роль играет понятие о дополнительном пространстве, впервые введенном Гёсом для метода Чезаро C^α [8]. Например, если F — некоторое пространство рядов из косинусов, то A-дополнительным пространством к F называется множество всех рядов вида (4), при которых ряд $\sum a_n c_n$ является A-суммируемым для всех рядов $\sum c_n \cos nx$ из F. Тем самым дополнительное пространство F — это класс последовательностей множителей суммируемости (F, A). Тыннов изучает общие свойства A-дополнительных пространств (F, A), определяет эти пространства для важнейших классов пространств F и показывает, что если все ряды пространства F являются A-суммируемыми по норме пространства F, то дополнительное пространство (F, A) совпадает (в смысле топологического изоморфизма) с сопряженным пространством F.*

Понятие A-дополнительного пространства является полезным и при изучении вопроса о так наз. мультипликаторах рядов Фурье. Пусть F и G — некоторые множества рядов Фурье. Последовательность $\{\lambda_n\}$ называется мультипликатором класса (F, G), если при каждом ряде (3) из множества F ряд $\sum \lambda_n A_n(t)$ принадлежит классу G. Начиная с 1923 г. мультипликаторами занимались многие известные математики, как, например, Фекете, Юнг, Штейнхаус, Сидон, Рисс, Бохнер, Зигмунд, Качмаж, Марцинкевич, Хилле, Тамаркин, Карамата, Томич, Скворцова, Харшиладзе, Катаяма, Верблюнский, Гёс [8] и др. Исследования по мультипликаторам ведутся в двух направлениях: 1) отыскивание необходимых и достаточных условий для того, чтобы $\{\lambda_n\} \in (F, G)$; 2) нахождение соотношений между различными классами мультипликаторов. В обоих направлениях Тынновым получены интересные результаты. Например, он из понятий дополнительного пространства и множителей суммируемости выводит, что, если $\{\lambda_n\} \in (A, B)$, то $\{\lambda_n\}$ является мультипликатором классов

$$[(F, A), (F, B)] \quad \text{и} \quad \{F, [(F, A), B]\}$$

для каждого F. Отсюда вытекают многие частные результаты.

3. Кангро принадлежит одно обобщение понятия A-суммируемости, которое учитывает также скорость приближения преобразованной последовательности $A(x)$ к пределу $\overline{A}(x)$. Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}$ ($\varphi_k > 0$, $\varphi_k \uparrow \infty$ или $\varphi_k = 1$) — заданная последовательность. Сходящуюся последовательность $x = \{\xi_k\}$ будем называть φ-сходящейся, если существует конечный предел*

$$\lim \varphi_k(\xi_k - \xi) = \beta \qquad (\xi = \lim \xi_k).$$

Обозначим через c^φ множество всех φ-сходящихся последовательностей. Последовательность x будем называть A^φ-суммируемой, если $A(x) \in c^\varphi$. Если $\varphi_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$, то A^φ-суммируемость превращается в A-суммируемость. Можно устанавливать необходимые и достаточные условия для того, чтобы $(A^\varphi)^* \supset c^\varphi$. При помощи этих условий для известных частных методов суммирования A и B можно (при некоторых ограничениях, налагаемых на φ) найти эффективные необходимые и достаточные условия для того, чтобы $\{\varepsilon_n\}$ была последовательностью множителей суммируемости класса (B^φ, A^φ).

Рассмотрим ортогональный ряд

$$\sum c_n f_n(x) \tag{6}$$

* Если $\varphi_k = 1$, то $\beta = 0$. В случае $\beta \neq 0$ разность $\xi_k - \xi$ стремится к нулю порядка $\frac{1}{\varphi_k}$.

по произвольной ортогональной системе $\{f_n\}$. В теории ортогональных рядов известны некоторые теоремы, утверждающие, что при выполнении условия

$$\sum c_n^2 \vartheta_n^2 < \infty \qquad (\vartheta_n > 0,\ \vartheta_n \uparrow \infty \text{ или } \vartheta_n = 1)$$

ряд (6) на некотором множестве E A-суммируем к функции $f(x)$ (см., напр., [12]). В теории приближения функций важно оценить скорость приближения A-преобразований частных сумм ряда (6) к функции $f(x)$, т. е. A^{φ}-суммируемость ряда (6). Информацию об этой скорости можно получить при помощи множителей суммируемости класса (A, A^{φ}). Оказывается, что если последовательность

$$\{\lambda_n\} \qquad (\lambda_n > 0,\ \lambda_n \uparrow \infty)$$

подобрана так, чтобы ряд $\sum c_n^2 \vartheta_n^2 \lambda_n^2$ сходился и $\{\frac{1}{\lambda_n}\}$ являлся последовательностью множителей суммируемости класса (A, A^{φ}), то ряд (6) на множестве E A^{φ}-суммируем к $f(x)$. Частный случай, когда $A = C$, рассматривали Алексич и Кралик [12].

Общая теория матричных методов суммирования

Консервативный матричный метод $A = (a_{nk})$ называется *корегулярным*, если

$$\varrho = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k \lim_n a_{nk} \neq 0,$$

и *конулевым*, если $\varrho = 0$. Метод A называется *реверсивным*, если система уравнений (1) имеет при каждом $\eta = \{\eta_n\} \in c$ единственное решение $x = \{\xi_k\}$. Метод A называется методом *типа* M, если система уравнений

$$\sum_n a_{nk} \tau_n = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

имеет в пространстве* l лишь нулевое решение, т. е. решение $\tau_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Метод A называется *совершенным*, если из справедливости соотношения

$$\overline{B}(x) = \overline{A}(x) \tag{7}$$

при всех $x \in c$ следует справедливость его при всех $x \in A^*$ для каждого метода B, включающего A (т. е. удовлетворяющего условию $B^* \supset A^*$).

1. После 1930 г., когда польский математик Мазур впервые применил методы функционального анализа в теории суммируемости, внимание многих математиков обратила на себя известная теорема Мазура—Банаха. Согласно этой теореме реверсивный корегулярный метод A является совершенным тогда и только тогда, когда A — метод типа M. Теорема Мазура—Банаха доказана Мазуром для нормального (т. е. треугольного и реверсивного) регулярного, а Банахом — для произвольного реверсивного регулярного метода A. В 1949 г. Виланский дока-

* Пространство l состоит из всех последовательностей $x = \{\xi_k\}$, при которых $\sum |\xi_k| < \infty$.

зал теорему Мазура—Банаха для нормального корегулярного метода, а в 1954 г. Мэкфейль [13] — для любого реверсивного корегулярного метода.

Оказалось, что для совершенства конулевого метода A условие теоремы Мазура—Банаха не является достаточным. В 1965 г. Юримяэ [14] нашел необходимые и достаточные условия для совершенства любого консервативного метода A. Он называет метод $A=(a_{nk})$ методом типа P, если система уравнений

$$\sum_n (a_{nk}-a_{n-1,k})\tau_n=0 \qquad (k=0, 1, \ldots)$$

имеет в пространстве a лишь нулевое решение $\{\tau_n\}$, и доказывает, что реверсивный консервативный метод A является совершенным тогда и только тогда, когда A — метод типа P.

В 1932 г. Банах [15] показал, что для регулярного метода A образ $A(c)$ пространства c плотен в пространстве c, т. е.

$$\overline{A(c)}=c, \tag{8}$$

если A — метод типа M. В 1937 г. Хилл доказал, что в случае реверсивного метода A условие Банаха является и необходимым для справедливости равенства (8). Рамануджан в 1954 г. установил, что требование реверсивности метода A в теоремах Банаха и Хилла оказывается излишним. Наконец, Парамесваран [16] в 1957 г. показал, что для каждого корегулярного метода A равенство (8) справедливо тогда и только тогда, когда A — метод типа M. Юримяэ [14], обобщая результат Парамесварана, показал, что для каждого консервативного метода A соотношение (8) справедливо тогда и только тогда, когда A — метод типа P.

Будем называть метод A^φ совершенным, если из справедливости соотношения (7) при всех $x\in c^\varphi$ следует справедливость его при всех $x\in(A^\varphi)^*$ для каждого метода B, удовлетворяющего условию $B^*\supset(A^\varphi)^*$. Можно показать, что если $\sum_k a_{nk}=a$ (a — постоянная, отличная от нуля), то совершенство метода A^φ сводится к совершенству метода $\mathfrak{A}=(\alpha_{nk})$, где

$$\alpha_{nk}=\frac{\varphi_n(a_{nk}-a_k)}{\varphi_k} \qquad (a_k=\lim_n a_{nk}).$$

2. В течение последних 10—20 лет особое внимание в общей теории суммируемости обращено на проблему суммируемости ограниченных последовательностей. Известно, что в поле суммируемости* A^* корегулярного метода A все ограниченные последовательности являются точками прикосновения подпространства c. Юримяэ [14] показал, что в поле A^* конулевого метода это утверждение, вообще говоря, не верно. Если же в поле A^* все ограниченные последовательности являются точками прикосновения подпространства c, то метод A он называет O-совершенным. Согласно сказанному выше, каждый корегулярный метод O-совершенный. Для O-совершенства конулевого метода Юримяэ устанавливает два простых необходимых и достаточных условия.

* Целлер [17] показал, что поле суммируемости A^* является полным локально выпуклым пространством, если вводить следующую систему полунорм:

$$\|x\|_n=|\xi_n|, \quad \|x\|_{A,n}=\sup_m\Big|\sum_{k=0}^m a_{nk}\xi_k\Big|, \quad \|x\|_A=\sup_n\Big|\sum_k a_{nk}\xi_k\Big|.$$

В 1932 г. Банах [15] показал, что для регулярного метода A в смысле топологии пространства c имеем

$$\overline{A(c)} = A(m \cap A^*), \tag{9}$$

где m — пространство всех ограниченных последовательностей. Парамесваран [16] в 1957 г. установил, что равенство (9) имеет место для всех корегулярных методов A. Юримяэ [14] показал, что для каждого консервативного метода A соотношение (9) справедливо тогда и только тогда, когда A является O-совершенным.

Уже Гейсберг [18] в 1962 г. отметил, что в поле абсолютной суммируемости $|A|^*$ ограниченные последовательности, вообще говоря, не являются точками прикосновения пространства a даже для абсолютно регулярного метода A. Если же матрица A такова, что в поле $|A|^*$ все ограниченные последовательности являются точками прикосновения пространства l, то Юримяэ [19] называет метод A **абсолютно O-совершенным**. Он показывает, что класс абсолютно O-совершенных методов содержит класс абсолютно совершенных методов, но не совпадает с ним. Юримяэ также доказывает, что для абсолютно O-совершенных методов имеют место аналог теоремы Мазура—Орлича [20] (т. е. из справедливости соотношения (7) при всех $x \in a$ следует справедливость его при всех $x \in m \cap |A|^*$ для каждого метода B, удовлетворяющего условию $|B|^* \supset |A|^*$), аналог теоремы Виланского—Целлера [21] (т. е. A абсолютно суммирует лишь абсолютно сходящиеся последовательности тогда и только тогда, когда пространство a замкнуто в поле $|A|^*$) и др.

Континуальные методы суммирования

Один из недостатков матричных методов суммирования последовательностей состоит в том, что уже самые естественные ограничения, налагаемые на матричные методы суммирования, значительно сужают поле суммируемости этих методов. Например, как показал польский математик Штейнхаус уже в 1911 г., регулярный матричный метод не может суммировать все ограниченные последовательности. Известно, что общий вид непрерывного линейного функционала на пространстве c сходящихся последовательностей можно вывести при помощи матричных методов суммирования. С целью найти общий вид непрерывного линейного функционала на пространстве m всех ограниченных последовательностей при помощи методов суммирования Реймерс пришел к новым методам суммирования, названным им континуальными. Континуальные методы суммирования свободны от отмеченного выше недостатка в том смысле, что существуют регулярные континуальные методы суммирования, суммирующие все ограниченные последовательности. Приводим понятие и некоторые важнейшие свойства континуальных методов суммирования.

1. Пусть E — множество всех последовательностей, элементами которых являются лишь нули и единицы. Если $\omega = \{\delta_k\} \in E$ и $\omega' = \{\delta_k'\} \in E$, то определяется $\omega\omega' = \{\delta_k\delta_k'\}$, а в случае $\omega\omega' = 0$ также $\omega + \omega' = \{\delta_k + \delta_k'\}$. Множество

$$q = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m\} = \{\omega_\nu\}_0^m$$

называется **разложением** последовательности ω, если

$$\omega = \sum_{\nu=0}^{m} \omega_\nu.$$

Множество Q_0 всех разложений последовательности $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ мы можем частично упорядочить, определяя $q' > q$, если $q' = q$, или если q' получается из q путем дальнейшего разложения хоть одного элемента ω_ν разложения q. Тем самым множество Q_0 превращается в направленное множество.

Пусть в последовательности ω_ν единицы расположены на местах с номерами* ν_n и пусть $q_0 = \{\omega_\nu\}_0^m$ — такое разложение последовательности e, где все ω_ν содержат бесконечно много единиц. Составим для каждого натурального числа n разложение

$$q_n = \{e_{\nu_0}, \quad e_{\nu_1}, \ldots, e_{\nu_{n-1}}, \omega_\nu - \sum_{k=0}^{n-1} e_{\nu_k}\}_0^m,$$

где $e_k = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ нулей}}, 1, 0, \ldots\}$. Например, если $q_0 = \{e\}$, то

$$q_n = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, e - \sum_{k=0}^{n-1} e_k\}.$$

При всех $n = 0, 1, \ldots$ имеем $q_{n+1} > q_n$. Пусть $Q \subset Q_0$ — направленное подмножество такое, что

1) из $q_0 \in Q$ вытекает $q_n \in Q$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

2) для каждого $q' \in Q$ существует такая последовательность разложений q_n, что $q_n > q'$ начиная с некоторого n.

Каждой последовательности разложений $q = \{q_n\}$ поставим в соответствие некоторую матрицу $\{a_{nk}(q)\}$ так, что разложению q_n соответствует n-я строка матрицы $(a_{nk}(q))$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Пусть дана числовая последовательность $x = \{\xi_k\}$. Составим суммы

$$\mathfrak{A}(x, q_n) = \sum_k a_{nk}(q)\,\xi_k \qquad (q_n \in Q),$$

предполагая все ряды $\sum_k a_{nk}(q)\,\xi_k$ сходящимися. Реймерс [22] называет последовательность x суммируемой **континуальным методом** $\mathfrak{A}$ (или $\mathfrak{A}$-суммируемой) к сумме $\overline{\mathfrak{A}}(x)$, если**

$$\mathfrak{A}(x) = \lim_Q \mathfrak{A}(x, q_n).$$

Если Q содержит только $\{q_n\}$ с $q_0 = \{e\}$, то $\mathfrak{A}$ является обычным матричным методом.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ — континуальный метод суммирования такой, что существуют числа

$$\varrho(\mathfrak{A}, \omega) = \mathfrak{A}(\omega) - \sum_k \mathfrak{A}(\omega e_k)$$

при всех $\omega \in E$. Рассмотрим последовательность разложений $\{q_n\}$, где $q_0 = \{\omega_\nu\}_0^m$. Пусть в последовательности ω_ν единицы расположены на

* Например, если $\omega_\nu = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$, то $\nu_n = 2n$.

** Запись $\mathfrak{A}(x) = \lim_Q \mathfrak{A}(x, q_n)$ означает, что соответственно каждому $\varepsilon > 0$ найдется такое разложение $q_\varepsilon \in Q$, что

$$|\mathfrak{A}(x) - \mathfrak{A}(x, q_n)| < \varepsilon$$

для всех $q_n > q_\varepsilon$, $q_n \in Q$.

местах с номерами ν_n. Так как $x=\sum_{\nu=0}^{m} x\omega_\nu$, то x разлагается на части $x\omega_\nu$, где элементы с индексами $k\neq\nu_n$ равны нулю. Из каждой части $x\omega_\nu$ возьмем элемент $\xi\nu_n$ и составим суммы

$$S(x, q_n)=\sum_{\nu=0}^{m} \varrho(\mathfrak{A}, \omega_\nu)\,\xi\nu_n \qquad (q_n \in Q).$$

Предел

$$S_{\mathfrak{A}}(x)=\lim_{Q} S(x, q_n)$$

Реймерс [22] называет $\mathfrak{A}$-интегралом последовательности x. Если последовательность x сходится, то имеем

$$S_{\mathfrak{A}}(x)=\varrho(\mathfrak{A}, e)\lim \xi_k.$$

Показывается, что метод $\mathfrak{A}$ ограниченно* суммирует все ограниченные последовательности тогда и только тогда, когда

1) $\sum_{k} |a_{nk}(q)|$ ограничена при всех n и $q_n \ni Q$,

2) все последовательности $\omega \in E$ являются $\mathfrak{A}$-суммируемыми.

При этом

$$\overline{\mathfrak{A}}(x)=S_{\mathfrak{A}}(x)+\sum_{k} \mathfrak{A}(e_k)\,\xi_k. \tag{10}$$

Пусть теперь f — произвольный непрерывный линейный функционал на пространстве m всех ограниченных последовательностей. Определим матрицу $\{a_{nk}(q)\}$, полагая при каждом ν

$$a_{n\nu_k}(q)=\begin{cases} f(\omega_\nu)-\sum_{k=0}^{n-1} f(e_{\nu_k}) & \text{при } k=n \\ f(e_{\nu_k}) & \text{при } k<n \\ 0 & \text{при } k>n. \end{cases}$$

Оказывается, что соответствующий метод $\mathfrak{A}$ суммирует все ограниченные последовательности x к сумме $f(x)$, т. е. $\overline{\mathfrak{A}}(x)=f(x)$. Отсюда на основе (10) вытекает

$$f(x)=S_{\mathfrak{A}}(x)+\sum_{k} \alpha_k \xi_k, \quad \sum |\alpha_k| < \infty,$$

где $\alpha_k=f(e_k)$. При этом норма функционала f вычисляется по формуле

$$\|f\|=\operatorname{Var} S_{\mathfrak{A}}+\sum_{k} |\alpha_k|,$$

где

$$\operatorname{Var} S_{\mathfrak{A}}=\sup_{q\in Q} \sum_{\nu=0}^{m} |\varrho(\mathfrak{A}, \omega_\nu)|.$$

3. Как показал Банах [15], каждой последовательности $\omega \in E$ можно сопоставлять в качестве суммы некоторое число $s(\omega)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $s(e)=1$

2) $s(\omega)\geqslant 0$

3) $s(\omega+\omega')=s(\omega)+s(\omega')$, если $\omega\omega'=0$

4) $s(\omega)=s(\omega')$, если $\omega=\{\delta_k\}$, $\omega'=\{\delta_{k+1}\}$.

* т. е. $|\mathfrak{A}(x, q_n)|\leqslant M$ при всех $q_n \in Q$.

Для каждой последовательности разложений $\{q_n\}$, где $q_0=\{\omega_\nu\}_0^m$, разложим последовательность $x=\{\xi_k\}$ на части $x\omega_\nu$. Из каждой части $x\omega_\nu$ выберем элемент ξ_{ν_n} и составим сумму

$$s(x, q_n)=\sum_{\nu=0}^{m} s(\omega_\nu)\,\xi_{\nu_n}.$$

Если существует предел

$$\lim_{Q} s(x, q_n)=s(x),$$

то Реймерс [22] называет последовательность x *s*-сходящейся к сумме $s(x)$. Легко проверить, что *s*-сходимость при $x\in c$ совпадает с обычной сходимостью. Оказывается, что последовательность x является *s*-сходящейся тогда и только тогда, когда x почти ограничена, т. е. $x-x\omega$ ограничена при некоторой последовательности $\omega\in E$ с $s(\omega)=0$.

Если для всех $q_n\in Q$ с $q_0=\{\omega_\nu\}_0^m$ имеем

$$a_{nk}(q)=\begin{cases} s(\omega_\nu) & \text{при } k=\nu_n \\ 0 & \text{при } k\neq\nu_n, \end{cases}$$

то соответствующий континуальный метод $\mathfrak{A}$ называется единичным методом. Поскольку в этом случае

$$\mathfrak{A}(x, q_n)=s(x, q_n),$$

то единичный метод суммирует лишь почти ограниченные последовательности. Если $Q=Q_0$, то $\mathfrak{A}^*=m^*$, где m^* — множество всех почти ограниченных последовательностей. Если Q содержит только $\{q_n\}$ с $q_0=\{e\}$, то $\mathfrak{A}^*=c$.

В общем случае можно метод $\mathfrak{A}$ (при некоторых дополнительных ограничениях) задать при помощи преобразования последовательности $x=\{\xi_k\}\in\mathfrak{A}^*$ в последовательность $y=\{\eta_n\}$, *s*-сходящуюся к $\overline{\mathfrak{A}}(x)$ (последовательность y, вообще говоря, зависит от q). Это преобразование, аналогичное матричному преобразованию (1), определяется для последовательности x и ее частей $x\omega_\nu$ равенством

$$s(y, q_n)=\mathfrak{A}(x, q_n).$$

4. Реймерс показал [23], что каждому L-измеримому множеству $l_\nu\subset[0, 1]$ можно сопоставлять последовательность $\omega_\nu\in E$ такую, что

1) $\operatorname{mes} l_\nu=s(\omega_\nu)$,

2) если $l_\nu\cap l_\mu=\varnothing$, то $\omega_\nu\omega_\mu=0$.

Тем самым каждому разбиению $\{l_\nu\}_0^m$ отрезка $[0, 1]$ на L-измеримые непересекающиеся множества l_ν соответствует разложение $q_0=\{\omega_\nu\}_0^m$ и тем самым разложение данной последовательности на части $x\omega_\nu$.

Оказывается, что любая ограниченная L-измеримая функция $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ представима в виде ограниченной числовой последовательности $x=\{\xi_k\}$ в том смысле, что при каждом $\varepsilon>0$ существует разбиение $\{l_\nu\}_0^m$ отрезка [0, 1] и натуральное число n_ε такие, что для каждой части x_{ω_ν} будет

$$|x(t) - \xi_{\nu_n}| < \varepsilon$$

при $t \in l_\nu$ и $n > n_\varepsilon$.

Пусть множество $Q \subset Q_0$ состоит из всех таких разложений $\{q_n\}$, при которых $q_0 = \{\omega_\nu\}_0^m$ соответствует некоторому разбиению отрезка [0, 1] на L-измеримые части. Составим для данной ограниченной L-измеримой функции $x(t)$ суммы Лебега

$$\sigma = \sum_{\nu=0}^{m} x_\nu \operatorname{mes} l_\nu .$$

Нетрудно показать, что $\lim\limits_{Q} [\sigma - s(x, q_n)] = 0$, где x — последовательность, представляющая функцию $x(t)$. Следовательно,

$$(L) \int_0^1 x(t)\, dt = s(x),$$

т. е. интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции $x(t)$ представляет собой $\mathfrak{A}$-сумму последовательности x, представляющей функцию $x(t)$, где $\mathfrak{A}$ — единичный метод. Тем самым открывается возможность для развития теории интеграла Лебега при помощи теории континуальных методов суммирования последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лумисте Ю., Тамме Э., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **150**, 12—52 (1964).
2. Барон С. и др., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **150**, 3—11 (1964).
3. Барон С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **9**, № 1, 47—68 (1960).
4. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.
5. Lal S. N., Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 311—319 (1963).
6. Барон С., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **177**, 106—120 (1965).
7. Кангро Г., Докл. АН СССР, **121**, 967—969 (1958).
8. Goes G., Studia Math., **19**, 133—148 (1960).
9. Тыннов М., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **150**, 154—164 (1964).
10. Тыннов М., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **192**, 65—81 (1966).
11. Тыннов М., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **192**, 82—97 (1966).
12. Alexits G., Králik D., Acta Math. Acad. Sci. Hung., **11**, 387—399 (1960).
13. Macphail M. S., Canad. J. Math., **6**, 405—409 (1954).
14. Юримяэ Э., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **177**, 43—61 (1965).
15. Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
16. Parameswaran M. R., Proc. Indian Acad. Sci., **A45**, 377—384 (1957).
17. Zeller K., Math. Z., **53**, 463—487 (1951).
18. Гейсберг С., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **129**, 297—307 (1962).
19. Юримяэ Э., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **150**, 132—152 (1964).
20. Mazur S., Orlicz W., Studia Math., **14**, 129—160 (1954).
21. Wilansky A., Zeller K., Trans. Amer. Math. Soc., **78**, 501—509 (1955).
22. Реймерс Э., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **129**, 119—154 (1962).
23. Реймерс Э., Тезисы кратких научных сообщений, УСМ, **4**, 76—77 (1966).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 25/IV 1967

G. KANGRO

MÕNEDEST UURIMUSTEST SUMMEERUVUSTEOORIAS

Artiklis tutvustatakse Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikute uuemaid uurimistulemusi summeeruvusteoorias. Käsitletakse järgmisi küsimusi:

1) summeeruvustegurite rakendus ortogonaalridade teoorias;
2) maatriksmenetluste üldine teooria;
3) kontinuaalsed summeerimismenetlused.

G. KANGRO

ON SOME INVESTIGATIONS ON THE THEORY OF SUMMABILITY

A survey of some recent results obtained by the mathematicians of the State University of Tartu on the theory of summability, is given. They are concerned with the following topics:

1) applications of summability factors to the theory of orthogonal series;
2) general theory of matrix summability methods;
3) continual methods of summability.