Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 1996, **45**, 2/3, 201–210
https://doi.org/10.3176/phys.math.1996.2/3.10

EINIGE VERALLGEMEINERTE MATRIXVERFAHREN

Anneli NAPPUS und Tamara SÕRMUS

Tallinna Pedagoogikaülikooli matemaatilise analüüsi õppetool (Fachbereich Mathematik, Pädagogische Universität Tallinn), Narva mnt. 25, EE-0102 Tallinn, Eesti (Estland)

Eingegangen am 14. Dezember 1995, akzeptiert am 4. Juni 1996

Abstraktion. Robinson (1950), Melvin-Melvin (1951) und Kangro (1956) haben den wohlbekannten Toeplitzschen und verwandte Sätze über Matrixverfahren verallgemeinert. In ihren Ergebnissen untersucht man solche Matrixverfahren, deren Elemente bestimmte Operatoren in gewissen Räumen sind. Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist die entsprechende Verallgemeinerung der klassischen Euler-Knoppschen und Rieszschen Verfahren. Dabei werden verschiedene Bedingungen dafür angegeben, daß diese Verfahren vom $\alpha \rightarrow \beta$-Typ sein sollen (α und β sind die Folgenräume m_X, c_X oder l_X). Unsere Resultate ergeben als Sonderfälle mehrere bekannte Verfahren und Bedingungen für Limitierung von Zahlenfolgen.

Stichwörter: abstrakte Folgen, beschränkte lineare Operatoren, Matrixverfahren, Verfahren vom $\alpha \rightarrow \beta$-Typ.

1. EINLEITUNG

Es seien α und β zwei Folgenräume reeller oder komplexer Zahlen. Ist $x = (x_k) \in \alpha$ und $A = (a_{nk})$ $(n, k = 0, 1, \dots)$ eine Matrix mit komplexen Elementen, so ist

$$y_n = \sum_k a_{nk} x_k \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

eine Matrixtransformation der Folge $x \in \alpha$, die wir durch $y = (y_n)$ oder $y = Ax$ bezeichnen. Unter den häufig vorkommenden Folgenräumen verstehen wir die folgenden 3 Räume: $m = \{x : \sup_n |x_n| < \infty\}$, $c = \{x : \lim_n x_n \text{ existiert}\}$ und $l = \{x : \sum_n |x_n| < \infty\}$. Sind α und β zwei dieser Folgenräume, so bedeutet $\alpha \rightarrow \beta$, daß Ax existiert und aus β ist für alle $x \in \alpha$ (kurz: ein Verfahren A ist vom $\alpha \rightarrow \beta$ - Typ).

Die Sätze für Konvergenztreue, Permanenz wie auch für die Eigenschaften wie $m \rightarrow c$, $l \rightarrow c$ und $l \rightarrow l$ sind gut bekannt. Zu diesen Sätzen von Kojima–Schur, Toeplitz, Schur, Hahn und Knopp–Lorentz vergleiche man etwa [1–6].

Robinson [7], Melvin-Melvin [8] und Kangro [9] haben die oben erwähnten Sätze über Matrixverfahren verallgemeinert. In ihren Ergebnissen untersucht man abstrakte Folgen (Reihen) und solche Matrixverfahren, deren Elemente bestimmte Operatoren in gewissen Räumen sind. Dabei verwendet man die Standardmethoden der Funktionalanalysis.

Nach der Bereitstellung einiger Bezeichnungen, Definitionen und Bedingungen in Nr. 2, wollen wir in Nr. 3 und Nr. 4 die operatorenförmigen Verallgemeinerungen von Euler–Knoppschen und Rieszschen Summierungsverfahren definieren. Dabei geben wir notwendige und hinreichende oder nur hinreichende Bedingungen dafür an, daß diese Verfahren vom $\alpha \to \beta$-Typ sein sollen. Unsere Resultate ergeben als Sonderfälle die entsprechenden Verfahren und Bedingungen für Limitierung von Zahlenfolgen. Bei einigen Behandlungsteilen können wir leider zum Beweis nur kurze Hinweise angeben.

2. BEZEICHNUNGEN, DEFINITIONEN UND FUNDAMENTALE ERGEBNISSE

Der Folgenindex soll, wenn nichts Besonderes gesagt ist, von 0 an laufen, und Folgenglieder mit einem negativen Index sind gleich 0 (auch Nullelement θ) zu setzen. Insbesondere schreiben wir

$$\sup_n \text{ statt } \sup_{n=0,1,\dots}\,; \lim_n \text{ statt } \lim_{n\to\infty} \text{ und } \sum_n \text{ statt } \sum_{n=0}^{\infty}$$

und anderes Ähnliche.

Unter B-Raum wird überall ein Banach-Raum verstanden (zu diesen Räumen vergleiche man etwa [10–12]). Es seien X und Y zwei B-Räume und $L(X,Y)$ der B-Raum aller beschränkten linearen Operatoren aus X in Y (was auch als $X \to Y$ geschrieben werden kann).

Wir betrachten eine Matrix $\mathcal{A} = (A_{nk})$, deren Elemente $A_{nk} \in \mathcal{L}(X,Y)$, und die Transformation

$$y_n = \sum_k A_{nk} x_k \qquad (n = 0, 1, \dots), \tag{1}$$

die die Folge $x = (x_k)$ mit $x_k \in X$ in $y = (y_n)$ mit $y_n \in Y$ transformiert. Das kann man auch kürzer $y = \mathcal{A}x$ schreiben. Von den Reihen in (1) verlangt man dabei gewöhnliche Konvergenz, was im Sinne der Norm des jeweils betrachteten B-Raumes zu verstehen ist.

Nun bezeichne m_X, c_X und l_X die folgenden 3 B-Räume:

$$m_X = \{x : \sup_k \|x_k\| < \infty\},$$

$$c_X = \{x : \lim_k x_k \text{ existiert im Sinne der starken Konvergenz}\}$$

die beiden mit der Norm

$$\|x\| = \sup_k \|x_k\| \tag{2}$$

und

$$l_X = \{x : \sum_k \|x_k\| < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|x\| = \sum_k \|x_k\|.$$

Ferner verwenden wir folgende allgemeine Sätze. Zu den zwei ersten vergleiche man [7, 8, 13], die übrigen stammen aber von Kangro [9].

Satz 1. *Genau dann ist eine Matrixtransformation* (1) *vom* $c_X \to c_Y$ *-Typ, wenn*

$$\lim_n A_{nk}x = A_k x \text{ existiert } (x \in X; k = 0, 1, \dots), \tag{3}$$

$$\lim_n \sum_k A_{nk}x = Ax \text{ existiert } (x \in X), \tag{4}$$

$$\sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^{p} A_{nk}x_k \right\| = \mathcal{O}(1) \quad (n, p = 0, 1, \dots) \tag{5}$$

gilt. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\lim_n y_n = Ax_* + \sum_k A_k(x_k - x_*) \qquad (x = (x_k) \in c_X),$$

wo $x_* = \lim_k x_k$.

Satz 2. *Genau dann ist eine Matrixtransformation* (1) *bei* $X = Y$ *permanent, wenn neben* (5) *noch* (3) *und* (4) *gelten, wo* $A = I$ *und* $A_k = \theta$ $(k = 0, 1, \dots)$.

Hier und überall weiter sind I und θ ein Einheits- und ein Nulloperator im X.

Satz 3. *Genau dann ist eine Matrixtransformation* (1) *vom $l_X \to c_Y$-Typ, wenn neben* (3) *noch folgendes gilt*:

$$\|A_{nk}\| = \mathcal{O}(1) \qquad (n, k = 0, 1, \dots). \tag{6}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt die Beziehung

$$\lim_n y_n = \sum_k A_k x_k \qquad (x = (x_k) \in l_X),$$

wo die Reihe für $\|x_k\| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert.

Satz 4. *Genau dann ist eine Matrixtransformation* (1) *vom $l_X \to l_Y$-Typ, wenn eine von x und k unabhängige positive Zahl M existiert, so daß*

$$\sum_n \|A_{nk}x\| \leq M\|x\| \qquad (x \in X; k = 0, 1, \dots)$$

gilt.

Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt

$$\sum_n y_n = \sum_k G_k x_k \qquad (x = (x_k) \in l_X),$$

wo $G_k = \sum_n A_{nk}$.

3. VERALLGEMEINERTE EULER–KNOPP-VERFAHREN

In diesem Abschnitt wollen wir von dem B-Raum $\mathcal{L}(X, X)$ und irgendeinem Operator $\Lambda \in \mathcal{L}(X, X)$ ausgehen. Dabei ist für $n = 1, 2, \dots$ die n-te Potenz von Λ, in Zeichen Λ^n, definiert als

$$\Lambda^n x = \Lambda(\Lambda^{n-1}x) \qquad (x \in X).$$

Für $\Lambda \neq \theta$ vereinbart man $\Lambda^0 = I$. Demnach gilt für jedes $k, m = 0, 1, \dots$ stets

$$\Lambda^k(\Lambda^m x) = \Lambda^{k+m}x = \Lambda^m(\Lambda^k x). \tag{7}$$

Natürlich gelten mit $\Lambda \in \mathcal{L}(X, X)$ auch die Beziehungen:

$$\Lambda^n \in \mathcal{L}(X, X), \;\; (I - \Lambda)^k \in \mathcal{L}(X, X), \;\; c\Lambda^k(I - \Lambda)^{n-k} \in \mathcal{L}(X, X)$$

für jedes $c \in \mathbf{C}$.

Es sei $(\mathcal{E},\Lambda) = (E_{nk})$ eine Normalmatrix mit den Elementen $E_{nk} \in \mathcal{L}(X,X)$, so daß

$$E_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k}\Lambda^k(I-\Lambda)^{n-k} & (k=0,1,\ldots,n), \\ \theta & (k>n). \end{cases} \tag{8}$$

Durch (8) definierte Matrix-Verfahren des Typus (1) wollen wir verallgemeinerte Euler–Knopp - oder $(\mathcal{E},\Lambda)$ -Verfahren nennen.

Wegen (7), (8) und der Analogie mit dem binomischen Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Lambda^k(I-\Lambda)^{n-k}x = (\Lambda+(I-\Lambda))^n x$$

gilt für jedes $n=0,1,\ldots$ und $x \in X$ die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Lambda^k(I-\Lambda)^{n-k}x = Ix. \tag{9}$$

Wir kommen nun zu den wichtigsten Eigenschaften des $(\mathcal{E},\Lambda)$ -Verfahrens.

Satz 5. *Genau dann ist* $(\mathcal{E},\Lambda)$ *-Verfahren* (8) *permanent, wenn*

$$\|\Lambda\| + \|I-\Lambda\| \le 1, \tag{10}$$

$$\|I-\Lambda\| < 1 \tag{11}$$

gilt.

Beweis. Die Gültigkeit der Behauptungen erhält man durch Anwendung von Satz 2.

Weil X ein B-Raum ist, so gilt (4) mit (8) und $A=I$ wegen (9) bei jedem $\Lambda \in \mathcal{L}(X,X)$. Für $(\mathcal{E},\Lambda)$ -Verfahren bedeutet (4) insbesondere die Gleichung

$$\lim_n \left\| \sum_{k=0}^{n} E_{nk}x - Ix \right\| = 0.$$

Nach dem Satz 2 läßt sich (3) mit $A_k = \theta$ $(k=0,1,\ldots)$ in

$$\lim_n \|E_{nk}x - \theta x\| = \lim_n \|E_{nk}x\| = 0 \quad (x \in X) \tag{12}$$

umschreiben. Wegen $\binom{n}{k} \sim n^k/k!$ und den Eigenschaften der Norm ist für jedes $x \in X$, $n=0,1,\ldots$ und $k=0,1,\ldots,n$ stets

$$\begin{aligned} \|\tbinom{n}{k}\Lambda^k(I-\Lambda)^{n-k}x\| &\le \|\Lambda\|^k\|I-\Lambda\|^{n-k}\tbinom{n}{k}\|x\| \\ &\sim \frac{\|x\|}{k!}\|\Lambda\|^k\|I-\Lambda\|^{-k}n^k\|I-\Lambda\|^n. \end{aligned} \tag{13}$$

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_n n^k \| I - \Lambda \|^n$ bei (11) ist $\lim_n n^k \|I - \Lambda\|^n = 0$ ablesbar. Daraus ergibt sich (12) mit (8) und (13).

Daß die Bedingung (5) bei (8) wegen (10) gilt, läßt sich durch folgende Abschätzungen ablesen. Für jedes $p, n = 0, 1, \ldots, (x_k) \subset X$ mit $\|x_k\| \leq 1$ und den Eigenschaften der Norm gilt nämlich

$$\left\| \sum_{k=0}^{p} E_{nk} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \|\Lambda^k (I - \Lambda)^{n-k}\| \|x_k\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|\Lambda\|^k \|I - \Lambda\|^{n-k} = (\|\Lambda\| + \|I - \Lambda\|)^n.$$

Deshalb ist klar, daß

$$\sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^{p} E_{nk} x_k \right\| = \mathcal{O}(1) \qquad (p, n = 0, 1, \ldots),$$

weil (10) vorausgesetzt ist.

Die Notwendigkeit von (10) und (11) ist ablesbar aus der $(\mathcal{E}, \Lambda)$ - Summierbarkeit der Folgen $(\theta, \ldots, \theta, x_r, \theta, \ldots)$ (r bel.) und $(\hat{x}, \hat{x}, \ldots)$, die die Grundmenge in B-Raum c_X bilden.

Somit wird der Beweis fertig.

Die Beweise von nächsten Sätzen 6–8 verlaufen in den Grundlinien analog zum Beweis von Satz 5 und deshalb sollen wir sie ablegen.

Satz 6. *Genau dann ist* $(\mathcal{E}, \Lambda)$ *-Verfahren* (8) *konvergenztreu, wenn* (10) *gilt.*

Aus dem Satz 6 erhalten wir, daß ein konvergenztreues $(\mathcal{E}, \Lambda)$ - Verfahren nichtpermanent ist, wenn $\Lambda = \theta$.

Satz 7. $(\mathcal{E}, \Lambda)$ *-Verfahren* (8) *ist vom* $l_X \to c_X$ *-Typ, wenn* (11) *gilt.*

Satz 8. $(\mathcal{E}, \Lambda)$ *-Verfahren* (8) *ist vom* $l_X \to l_X$ *-Typ, wenn* (10) *und* (11) *gelten.*

Wir wollen noch einige Spezialfälle von $(\mathcal{E}, \Lambda)$ -Verfahren betrachten.

Für $\Lambda = I$ geht $(\mathcal{E}, \Lambda)$ in das Konvergenz- oder Einheitsverfahren $\mathcal{E} = (E_{nk})$ mit

$$E_{nk} = \begin{cases} I & \text{für } k = n, \\ \theta & \text{für } k \neq n \end{cases}$$

über. Dabei gelten (10) und (11), so daß $\mathcal{E}$ permanent ist.

Für $\Lambda = \theta$ erhalten wir das $\mathcal{E}_0$ -Verfahren mit

$$E_{nk} = \begin{cases} I & \text{für } k = 0, \\ \theta & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$$

Es gilt (10) (aber nicht (11)) und deshalb ist $\mathcal{E}_0$ nichtpermanent. Das $\mathcal{E}_0$ -Verfahren ist sogar vom $m_X \to c_X$ -Typ.

Mit $\Lambda = \lambda I$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ ergibt $(\mathcal{E}, \Lambda)$ das Euler–Knopp-Verfahren für Anwendungen im B-Raum X. Bei $X = \mathbf{C}$ erhalten wir das bekannte E_λ-Verfahren deren Elemente durch

$$a_{nk} = \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}$$

bestimmt sind (vgl. [1], §18; [13], §64).

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Behauptung, daß unsere Sätze 5–8 bekannte Ergebnisse für das klassische E_λ- Verfahren als Spezialfälle enthalten (vgl. etwa [1], §18; [3]).

4. VERALLGEMEINERTE RIESZ-VERFAHREN

Das folgende verallgemeinerte Verfahren enthält mehrere bekannte Summierungsverfahren zur Limitierung von Zahlenfolgen.

Wir wollen von den B-Räumen $X, \mathcal{L}(X, X)$ und einer Operatorenfolge $(P_n) \subset \mathcal{L}(X, X)$ ausgehen. Es sei $(\mathcal{R}, P_n) = (R_{nk})$ eine Normalmatrix mit den Elementen $R_{nk} \in \mathcal{L}(X, X)$, so daß

$$R_{nk} = \begin{cases} \mathcal{R}_n P_k & (k = 0, 1, \ldots, n), \\ \theta & (k > n), \end{cases} \tag{14}$$

wo $\mathcal{R}_n \in \mathcal{L}(X, X)$ durch

$$\mathcal{R}_n \sum_{k=0}^{n} P_k x = Ix \qquad (x \in X; n = 0, 1, \ldots) \tag{15}$$

definiert ist. Das damit bestimmte Verfahren des Typus (1) wird verallgemeinertes Riesz- oder $(\mathcal{R}, P_n)$ -Verfahren genannt.

Wegen (14) und (15) gilt für jedes $x \in X$ stets

$$\lim_n \left\| \mathcal{R}_n \sum_{k=0}^{n} P_k x - Ix \right\| = 0. \tag{16}$$

In diesem Abschnitt können wir einige Eigenschaften des $(\mathcal{R}, P_n)$ -Verfahrens nur noch formulieren.

Satz 9. *Ein* $(\mathcal{R}, P_n)$ *-Verfahren* (14) *ist permanent, wenn*

$$\|\mathcal{R}_n\| \sum_{k=0}^{n} \|P_k\| = \mathcal{O}(1) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{17}$$

$$\lim_n \|\mathcal{R}_n\| = 0 \tag{18}$$

gilt.

Beweis. Die Behauptung erhält man durch Anwendung von Satz 2.

Es ist klar, daß (4) mit (14) und $A = I$ für jedes $P_n \in \mathcal{L}(X, X)$ gilt, weil der Grenzwert (16) wegen (15) existiert. Weiter ergibt sich aus (18) für jedes $x \in X, k = 0, 1, \ldots$ und aus den Eigenschaften der Norm, daß

$$0 \leq \|R_{nk}x - \theta x\| \leq \|P_k\| \cdot \|x\| \cdot \|\mathcal{R}_n\| \to 0.$$

Deshalb existiert $\lim_n R_{nk}x = \theta$, und damit gilt (3) mit $A_k = \theta$.

Daß (5) bei (14), (15) und $\|x_k\| \leq 1$ wegen (17) gilt, läßt sich durch folgende Abschätzungen ablesen:

$$\left\| \mathcal{R}_n \sum_{k=0}^{p} P_k x_k \right\| \leq \|\mathcal{R}_n\| \sum_{k=0}^{p} \|P_k\| \cdot \|x_k\| \leq \|\mathcal{R}_n\| \sum_{k=0}^{n} \|P_k\|.$$

Satz 10. *Ein* $(\mathcal{R}, P_n)$ *-Verfahren ist kovergenztreu, wenn* (17) *gilt und ein* $\mathcal{R}^* \in \mathcal{L}(X, X)$ *existiert, so daß*

$$\lim_n \|\mathcal{R}_n - \mathcal{R}^*\| = 0. \tag{19}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\lim_n y_n = \mathcal{R}^* \sum_k P_k(x_k - x_*) + x_* \qquad (x = (x_k) \in c_X),$$

wo $x_* = \lim_k x_k$ *ist.*

Die Bedingungen (18) und (19) mit der starken Konvergenz von $(\mathcal{R}_n) \subset \mathcal{L}(X, X)$ versichern auch die punktweise Konvergenz der Folge $(\mathcal{R}_n)$, doch nicht umgekehrt. Es ist aber erweisbar, daß die für $c_X \to c_X$ notwendigen Bedingungen mit der punktweisen Konvergenz von $(\mathcal{R}_n)$ verbunden sein sollen.

Für die Folgen des B-Raumes X sind auch solche $(\mathcal{R}_n, P_n)$ - Verfahren anwendbar, wo $P_k = p_k I$ mit $p_k \in \mathbf{C}$ und $\mathcal{R}_n = (\sum_{k=0}^n p_k)^{-1} I$ ist.

Bei $X = \mathbf{C}$, $P_k = p_k$ mit $p_k \in \mathbf{C}$ und $\mathcal{R}_n = (\sum_{k=0}^n p_k)^{-1}$ erhält man aber das klassische Riesz-Verfahren, damit auch die Spezialfälle wie das Cesàro-Verfahren C_1, das logarithmische Verfahren l mit $p_k = (k+1)^{-1}$, das Zygmund-Verfahren (Z, α) $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ mit $p_k = (k+1)^\alpha - k^\alpha$ und das (R, a^n) -Verfahren mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Baron, S. *Vvedenie v teoriyu summiruemosti ryadov*. Valgus, Tallinn, 1977 (Russisch).
2. Hahn, H. Über Folgen linearer Operationen. *Monatsh. Math. und Phys.*, 1922, **32**, 25–30.

3. Knopp, K. und Lorentz, G. G. Beiträge zur absoluten Limitierung. *Arch. Math. (Basel)*, 1949, **2**, 10–16.

4. Kojima, T. On generalized Toeplitz's theorems on limit and their applications. *Tôhoku Math. J.*, 1917, **12**, 291–326.

5. Schur, I. Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. *J. Reine Angew. Math.*, 1921, **151**, 79–111.

6. Toeplitz, O. Über allgemeine lineare Mittelbildungen. *Prace Matematyczno Fizyczne*, 1911, **22**, 113–119.

7. Robinson, A. On functional transformations and summability. *Proc. London Math. Soc.* (2), 1950, **52**, 132–160.

8. Melvin-Melvin, H. On generalized K-transformations in Banach spaces. *Proc. London Math. Soc.* (2), 1951, **53**, 83–108.

9. Kangro, G. O matrichnykh preobrazovaniyakh posledovatel'nostei v banakhovykh prostranstvakh. *Izv. AN ESSR. Fiz. Matem.*, 1956, **5**, 2, 108–128.

10. Naas, J. und Schmid, H. L. *Mathematisches Wörterbuch.* Berlin, 1974.

11. Wilansky, A. An application of Banach linear functionals to summability. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, **67**, 1, 59–68.

12. Zeller, K. und Beekmann, W. *Theorie der Limitierungsverfahren.* Springer, Berlin, 1970.

13. Zeller, K. Verallgemeinerte Matrixtransformationen. *Math. Z.*, 1952, **56**, 1, 18–20.

MÕNED ÜLDISTATUD MAATRIKSMENETLUSED

Anneli NAPPUS, Tamara SÕRMUS

Olgu X ja Y kaks B-ruumi ja $\mathcal{L}(X,Y)$ kõigi ruumist X ruumi Y toimivate tõkestatud lineaarsete operaatorite ruum. On vaadeldud operaatoritega $A_{nk} \in \mathcal{L}(X,Y)$ $(n,k = 0,1,\dots)$ määratud üldistatud maatriksmenetlust $\mathcal{A} = (A_{nk})$, mis teisendab jada $x = (x_k)$ elementidega $x_k \in X$ jadaks $y = (y_n)$ elementidega $y_n \in Y$ valemite (1) järgi. Seejuures on arvatud valemite (1) read koonduvaiks (hariliku koonduvuse mõttes ruumis Y) ja kirjutatud lühidalt $y = \mathcal{A}x$. Varasemas kirjanduses on tuletatud tingimused selleks, et menetlus $\mathcal{A}$ oleks $\alpha \to \beta$-tüüpi, kus α ja β on jadaruumide m_X, c_X või l_X teatavad paarid. Menetluse konservatiivsuse ja regulaarsuse küsimusi on käsitlenud mitmed autorid, nagu H. Melvin-Melvin, K. Zeller ja G. Kangro.

Käesolevas töös on defineeritud operaatorikujulised üldistused Euleri–Knoppi ((8) punkt 3) ja Rieszi ((14) ja (15) punkt 4) menetluste puhul ning tuletatud tingimused nende menetluste regulaarsuse (teoreemid 5, 9), konservatiivsuse (teoreemid 6, 10) ja teiste $\alpha \to \beta$-tüüpi omaduste (teoreemid 7, 8) kohta. Defineeritud üldistatud menetlused ja tõestatud teoreemid sisaldavad erijuhuna vastavaid klassikalisi maatriksmenetlusi arvjadade summeerimiseks ja teoreeme nende menetluste kohta.

ON SOME GENERALIZED SUMMABILITY METHODS

Anneli NAPPUS and Tamara SÕRMUS

The present paper is devoted to the generalizations of some classical summability methods from the point of view of the generalized concept of summability. For this purpose the results obtained by Melvin-Melvin (Proc. London Math. Soc. (2), 1951, 53), Zeller (*Theorie der Limitierungsverfahren.* Springer, Berlin, 1970), and Kangro (Izv. AN ESSR. Fiz. Matem., 1956, 5) for the summability of sequences in abstract spaces X by the summability methods defined by matrices of bounded linear operators are used. The operator-form generalizations of classical Euler–Knopp and Riesz summability methods are introduced. The conditions under which these methods will be of $\alpha \to \beta$-type (where α and β are any of the sequence spaces m_X, c_X or l_X) are also given.