Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1993, 42, 2, 157—165
https://doi.org/10.3176/phys.math.1993.2.03

УДК 539.12

*Эуген ПААЛ**

МУФАНГ—МАЛЬЦЕВСКАЯ СИММЕТРИЯ

(Представил Р.-К. Лойде)

Разъясняется идея Муфанг—Мальцевской симметрии и дается обзор соответствующей литературы. Выдвигается концепция Пуассон-Мальцевского многообразия, позволяющая, по мнению автора, с новой точки зрения и более просто сформулировать проблему аномального квантования неабелевой киральной калибровочной теории.

1. Введение

Неассоциативность привлекает широкое внимание с первых дней создания квантовой механики вплоть до наших дней. Об устойчивости этого интереса свидетельствует огромное количество работ, посвященных неассоциативным структурам. В настоящее время для физики можно выделить по меньшей мере три важных источника неассоциативности; 1) кривизну [1–4], 2) спонтанное нарушение симметрии [5, 6] и 3) аномалии [7–13].

Лупы Муфанг [14] и алгебры Мальцева [15] являются прямыми обобщениями групп и алгебр Ли соответственно. Из-за уникальности октонионов [16–18] особое положение в физике занимают также октонионная лупа Муфанг и октонионная алгебра Мальцева. Неоктонионные алгебры Мальцева недавно появились в физике в связи с исследованиями аномалии в квантовой теории поля. Вычисления [11] с помощью предельной теоремы Бъеркена—Джонсона—Лоу [19, 20] показывают, что канонические одновременные коммутаторы (ОВК) электрических полей неабелевой киральной калибровочной теории оказываются аномальными (нетривиальными), так что модифицированные ОВК удовлетворяют вместо тождества Якоби тождеству Мальцева. Этот результат был подтвержден другим способом в [12–13]. Следует также отметить, что нелиевость данной модели была подставлена под сомнение дальнейшим анализом [21, 22] двойных ОВК.

Теория луп Муфанг и алгебр Мальцева получила за последние десятилетия значительное развитие [23–47] (данный список неполный, указаны лишь некоторые книги, обзоры и ключевые работы по тематике). Дана классификация конечных простых неассоциативных луп Муфанг и конечномерных простых нелиевых алгебр Мальцева. Доказаны теоремы существования, связывающие алгебры Мальцева с ана-

* Matemaatika Instituut, Tallinna Tehnikaülikool (Институт математики, Таллиннский технический университет). Ehitajate tee 5, EE-0026 Tallinn. Estonia.

литическими лупами Муфанг. Хорошо разработана структурная теория алгебр Мальцева, в деталях повторяющая структурную теорию алгебр Ли. Выяснен геометрический смысл аналитических луп Муфанг и алгебр Мальцева. Разработаны основы теории эйленберговских [48] представлений алгебр Мальцева. Появившаяся в последнее время перспектива физических приложений делает эту теорию актуальной и интересной также для физики. Однако следует отметить отсутствие (по сведениям автора) работ по деформациям и сжатиям алгебр Мальцева, тем более, что основы теории когомологии алгебр Мальцева были заложены уже раньше [33]. Это обстоятельство, конечно, тормозит приложение теории в физике.

Для применения луп Муфанг и алгебр Мальцева в физике необходима, однако, некоторая переформулировка существующей теории луп Муфанг и алгебр Мальцева, а также дополнение этой теории элементами, учитывающими специфику физических приложений.

Группы реализуются в физике чаще всего как группы симметрии, а алгебры Ли появляются в физических приложениях чаще всего как алгебры инфинитезимальных операторов непрерывных групп симметрии. В настоящее время неясно, как использовать лупы Муфанг и алгебры Мальцева для описания природных явлений и симметрий. Теория представлений луп Муфанг, по существу, не разработана. Существующая теория эйленберговских представлений алгебр Мальцева не ориентирована на приложения и применялась только для изучения строения самих алгебр Мальцева. К тому же исходные (определяющие) соотношения эйленберговского представления алгебры Мальцева выглядят с прикладной точки зрения довольно громоздкими и малопривлекательными. Физические теории, для которых соображения симметрии и простоты имеют первостепенную важность, не могут быть основаны на несимметричных и громоздких исходных определениях.

В то время как значение луп Муфанг и алгебр Мальцева в физике остается спорным, выяснение их возможной роли требует разработки ориентированной на физические приложения теории представлений луп Муфанг и алгебр Мальцева. Поэтому представляет значительный интерес расширение (обобщение) теоретико-группового метода симметрии на базе луп Муфанг и алгебр Мальцева. Поиску такого расширения посвящены недавние работы [49–60], основные идеи и результаты которых сжато излагаются в настоящей работе. В этом смысле данная работа является обзорной.

2. Лупы Муфанг и алгебры Мальцева

Множество G с одной бинарной алгебраической операцией называется *лупой Муфанг* [14, 23, 24], если 1) для любых $g, h \in G$ уравнения $gx = h$ и $yg = h$ однозначно разрешимы, 2) в G есть такой элемент e, что $eg = ge = g$ для всех $g \in G$, 3) для любых трех элементов $g, h, k \in G$ выполнено *тождество Муфанг*

$$(gh)(kg) = g(hk)g. \tag{2.1}$$

Элемент e называется *единицей* лупы Муфанг G. Лупа Муфанг G называется *аналитической* [15], если множество G является аналитическим многообразием и основные операции лупы G (умножение и взятие обратного элемента) аналитичны. Касательная алгебра аналитической лупы Муфанг G вводится аналогично касательной алгебре группы Ли [61], ее будем обозначать через Γ. Геометрически Γ является касательным пространством к многообразию G в точке e. Произведение элементов $x, y \in \Gamma$ будем обозначать квадратными скобками $[x, y]$.

Касательная алгебра аналитической лупы Муфанг не обязана быть алгеброй Ли. Другими словами, в алгебре Г может существовать тройка элементов x, y, z, для которой нарушено тождество Якоби

$$J(x, y, z) := [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \neq 0. \tag{2.2}$$

Однако вместо тождества Якоби для любых $x, y, z \in \Gamma$ имеет место [15] более общее тождество

$$[[x, y], [z, x]] + [[[x, y], z], x] + [[[y, z], x], x] + [[[z, x], x], y] = 0, \tag{2.3}$$

называемое *тождеством Мальцева*. Антикоммутативные алгебры, в которых выполняется тождество Мальцева, называются *алгебрами Мальцева*. Тождество Мальцева (2.3) можно переписать в виде

$$[J(x, y, z), x] = J(x, y, [x, z]), \tag{2.4}$$

из которого легко усмотреть, что всякая алгебра Ли также является алгеброй Мальцева. Любая конечномерная алгебра Мальцева над полем вещественных чисел оказывается касательной алгеброй некоторой аналитической лупы Муфанг [36–38, 43, 44].

В антикоммутативной алгебре (характеристики $\neq 2$ и 3) тождество Мальцева (2.3) эквивалентно [32] *тождеству Сейгла—Ямагути*

$$[x, y, [z, w]] = [[x, y, z], w] + [z, [x, y, w]], \tag{2.5}$$

где

$$[x, y, z] := [x, [y, z]] - [y, [x, z]] + [[x, y], z] \tag{2.6}$$

есть *тройное произведение Ямагути* в алгебре Мальцева M.

Тождество Сейгла—Ямагути можно взять в качестве определяющего тождества алгебры Мальцева. В [49] подробно излагается новое и более эффективное доказательство этого тождества. Выделены основные этапы доказательства, имеющие также самостоятельное значение: условия *минимальности (обобщенные уравнения Ли*, описывают «минимальность» *неассоциативности* в аналитических лупах Муфанг), *триальность, обобщенные уравнения Маурера—Картана*, условия *интегрируемости* обобщенных уравнений Ли, условия *тройной замкнутости*, условия *редуктивности*. Условия редуктивности являются следствием условий интегрируемости обобщенных уравнений Ли. Обобщенные уравнения Маурера—Картана можно переписать в виде *коммутационных соотношений* (КС) для *инфинитезимальных трансляций* (дифференциалы трансляций в единице) аналитической лупы Муфанг. Оказывается, что тождество Сейгла—Ямагути является алгебраическим следствием обобщенных уравнений Маурера—Картана и условий *редуктивности*. Представлено также новое доказательство классических тождеств, известных в теории алгебр Мальцева — тождеств, характеризующих алгебру Мальцева как тройную или общую тройную систему Ли [32–34].

3. Бипредставления луп Муфанг

В основе теоретико-групповой идеологии лежит понятие представления группы. Для луп Муфанг это понятие естественно обобщить следующим образом.

Пусть G — лупа Муфанг с единицей e, $\mathfrak{X}$ — множество и $\mathfrak{T}(\mathfrak{X})$ — группа (биективных) преобразований множества $\mathfrak{X}$. Через E обозначим тождественное преобразование множества $\mathfrak{X}$.

О п р е д е л е н и е. *Пара* (S, T) отображений $g \to S_g$, $g \to T_g$ *лупы Муфанг* G *в группу* $\mathfrak{T}(\mathfrak{X})$ *называется* [50] действием *лупы* Муфанг G *на* множестве $\mathfrak{X}$, *если*

$$S_e = T_e = E \tag{3.1}$$

и для любых $g, h \in G$ *выполняются условия*

$$S_g T_g S_h = S_{gh} T_g, \qquad S_g T_g T_h = T_{hg} S_g. \tag{3.2}$$

Пара (S, T) называется также *бипредставлением* лупы Муфанг G. Преобразования S_g, $T_g \in \mathfrak{T}(\mathfrak{X})$ $(g \in G)$ называются *G-преобразованиями* (*преобразования Муфанг*) множества $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ естественно назвать *пространством бипредставления* (S, T), или *G-пространством.*

Алгебраические свойства таких преобразований были недавно рассмотрены в [50, 53, 55, 56]. Отметим здесь лишь следующие самые элементарные:

$$S_g T_g = T_g S_g, \quad S_g^{-1} = S_{g^{-1}}, \quad T_g^{-1} = T_{g^{-1}} \; \forall g \in G. \tag{3.3}$$

Более искушенные свойства, такие как *триальность,* условия *тройной замкнутости,* условия *минимальности* (описывают отклонение бипредставления от гомоморфизма и антигомоморфизма), теоремы о *ядре бипредставления* рассмотрены в [50]. В [55, 56], следуя идее В. Д. Белоусова о *производной* лупе [24], вводятся *производные бипредставления* луп Муфанг, перечисляются их свойства и доказывается, что последние имитируют соответствующие свойства производных луп.

4. Бипредставления алгебр Мальцева

Основы теории представлений алгебр Мальцева, которая следует концепции *С. Эйленберга* [48] были разработаны уже в [33, 35]; основные результаты этой теории изложены в [29, 30]. В данной работе предлагаются два эквивалентных *нэйленберговских* определения для *бипредставления* алгебры Мальцева. Следует отметить, что с точки зрения альтернативных алгебр [16–18], приведенные ниже определения можно считать наиболее естественными.

Пусть M — алгебра Мальцева и L — алгебра Ли; подразумевается, что M и L рассматриваются над одним и тем же числовым полем.

О п р е д е л е н и е I. *Пара* (S, T) *линейных отображений* $x \to S_x$, $x \to T_x$ *алгебры* M *в алгебру Ли* L *называется* бипредставлением *алгебры Мальцева* M, *если для любых* $x, y, z \in M$ *имеют место следующие соотношения* (*в* L):

$$[S_x, S_y] = S_{[x,y]} - 2[S_x, T_y], \tag{4.1a}$$

$$[T_x, T_y] = -T_{[x,y]} - 2[T_x, S_y], \tag{4.1b}$$

$$6[Y(x;y), S_z] = S_{[x,y,z]}, \qquad 6[Y(x;y), T_z] = T_{[x,y,z]}, \tag{4.2}$$

где $Y(x, y)$ *определяется формулой*

$$3Y(x;y) := S_{[x,y]} - T_{[x,y]} + 3[S_x, T_y], \tag{4.3}$$

а $[x, y, z]$ *есть* тройное произведение Ямагути [34, 35] *в алгебре Мальцева* M, *определяемое формулой* (2.6).

Соотношения (4.2) называются *условиями редуктивности.*

Определение II. *Пара (S, T) линейных отображений* $x \to S_x$, $x \to T_x$ *алгебры M в алгебру Ли L называется* бипредставлением *алгебры Мальцева M, если для любых x, y, z* $\in$ *M имеют место (в L) соотношения* (4.1a, b) *и соотношения*

$$[[S_x, S_y], S_z] = S_{(x,y,z)}, \qquad [[T_x, T_y], T_z] = T_{(x,y,z)}, \tag{4.4}$$

где тройное произведение Лооса *(x, y, z) в алгебре Мальцева M определяется* [34] *формулой*

$$3(x, y, z) := [x, [y, z]] - [y, [x, z]] + 2[[x, y], z]. \tag{4.5}$$

Соотношения (4.4) называются *условиями тройной замкнутости.*

При таких определениях возникает вопрос о непротиворечивости в том смысле, что структура алгебры Ли L должна быть согласована со структурой алгебры Мальцева M (не всякая алгебра Мальцева является алгеброй Ли). Непротиворечивость данных определений гарантируется классическими тождествами, характеризующими алгебру Мальцева M как *тройную* или *общую тройную систему Ли.* В непротиворечивости можно убедиться, проверив тождества Якоби в алгебре Ли L. Соответствующие вычисления, общий ход которых не зависит от конкретного бипредставления алгебры Мальцева M, явно представлены в [49].

5. Непрерывные бипредставления

Пусть G аналитическая лупа Муфанг, и $\mathfrak{X}$ конечномерное дифференцируемое (гладкое, аналитическое) многообразие.

Действие *(S, T)* лупы Муфанг G на многообразии $\mathfrak{X}$ называется [51, 54] *дифференцируемым (гладким, аналитическим),* если локальные координаты точек S_gA и T_gA $(g \in G,\ A \in \mathfrak{X})$ являются дифференцируемыми (гладкими, аналитическими) функциями локальных координат точек g и A. Бипредставление (S, T) в этом случае также называется *дифференцируемым (гладким, аналитическим).*

В [51, 60] изучаются непрерывные (достаточное число раз дифференцируемые) преобразования Муфанг. Устанавливаются *обобщенные уравнения Ли,* последние обобщают естественным (минимальным) образом *уравнения Ли* из теории групп преобразований Ли [61]. Вычисляются КС инфинитезимальных преобразований Муфанг — инфинитезимальных операторов непрерывных бипредставлений аналитических луп Муфанг. Как оказывается, эти КС не зависят от конкретного (непрерывного) бипредставления данной аналитической лупы Муфанг, а только от ее структурных постоянных. Результаты вычислений удобнее всего сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Дифференциал бипредставления (в единице) аналитической лупы Муфанг является бипредставлением касательной алгебры Мальцева этой лупы.*

Перефразируя эту теорему можно сказать, что инфинитезимальные операторы непрерывного бипредставления аналитической лупы Муфанг реализуют бипредставление касательной алгебры Мальцева этой лупы. Оказывается, что указанное бипредставление алгебры Мальцева реализуется конечномерной (если данная аналитическая лупа Муфанг конечномерная) подалгеброй в *алгебре Ли* векторных полей на пространстве бипредставления лупы Муфанг. Короче, инфинитезимальные преобразования Муфанг удовлетворяют коммутационным соотношениям вида (4.1—4).

6. Муфанг—Мальцевские симметрии, законы сохранения и квантование

Суть концепции Муфанг—Мальцевской симметрии заключается в следующем. Если некоторая система или величина оказывается инвариантной относительно G-преобразований, реализующие какое-то бипредставление лупы Муфанг G, то такую систему естественно называть *G-инвариантной,* а данную величину *G-инвариантом*; сами G-преобразования естественно в таком случае называть *G-симметриями* этой системы или величины. *Муфанг—Мальцевскими* назовем эти симметрии тогда, когда они реализуют бипредставления *аналитических* луп Муфанг.

Таким образом, оставаясь в рамках традиционного понимания и истолкования симметрии, понятие Муфанг—Мальцевской симметрии может быть естественно введено. Реализация концепции Муфанг—Мальцевской симметрии означает, аналогично теоретико-групповому подходу, *конкретизацию* лупы Муфанг и пространства ее бипредставления.

Идея Муфанг—Мальцевской симметрии разъясняется точнее в [54]. В этой работе найдена *полная* система ДУ для инвариантов непрерывных (локальных) *G-преобразований.* Условие *полноты* этой системы ДУ оказывается тесно связанной со структурой бипредставлений алгебр Мальцева и с тождеством Сейгла—Ямагути; оказывается, что полнота гарантируется фактически тождеством Сейгла—Ямагути. Вводятся также понятия *слабой* и *скрытой* (неявной) Муфанг—Мальцевской симметрии, не имеющие *нетривиальных* теоретико-групповых аналогий, и устанавливаются *полные* системы ДУ для *слабых* и *скрытых* G-инвариантов. Как оказывается, *полнота* последних систем ДУ гарантируется тем, что инфинитезимальные операторы *слабых* и *скрытых* G-симметрий реализуют *слабые* и *обобщенные* представления алгебр Мальцева в смысле К. Ямагути [33].

Здесь следует отметить, что слабые и обобщенные представления алгебр Мальцева были введены в [33] формально, а возможность введения понятия Муфанг—Мальцевской симметрии на базе *эйленберговских* представлений остается до сих пор неясной.

В [52, 58, 59] показано, как идею Муфанг—Мальцевской симметрии можно реализовать в *лагранжевой* теории поля, и представлен необходимый математический аппарат. Вводятся нетеровские токи и заряды и устанавливается *полная* система законов сохранения, соответствующие непрерывным Муфанг—Мальцевским симметриям. Для временных компонент нетеровских токов вычисляются (каноническим методом) *одновременные коммутаторы* (ОВК), которые обобщают основанные на *групповой* формализации хорошо известные [10] в теории поля ОВК. Результаты вычислений естественно сформулировать в терминах бипредставлений. Оказывается, что нетеровские заряды, порожденные непрерывными Муфанг—Мальцевскими симметриями реализуют *бипредставление* алгебры Мальцева. При рассмотрении *слабой* и *скрытой* (неявной) Муфанг—Мальцевской симметрии оказывается, что нетеровские заряды, соответствующие этим видам симметрий, реализуют, соответственно, *слабые* и *обобщенные* представления алгебр Мальцева в смысле К. Ямагути [33]. Находятся полные системы законов сохранения, порожденные также этими (слабыми и скрытыми) видами симметрии.

Следует отметить, что в отличие от [11–13], где алгебра Мальцева появилась как *аномалия* (т. е. как *квантово-механическое* нарушение симметрии), при данном подходе алгебры Мальцева могут рождаться уже на *классическом* уровне (до квантования). Следуя аналогии с пуассоновским многообразием [62], введем понятие *Пуассон—Мальцевского многообразия*.

Пусть $\mathfrak{X}$ — дифференцируемое многообразие, и пусть $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ — алгебра (скалярных) функций на $\mathfrak{X}$; элементы множества $\mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ назовем наблюдаемыми. Умножение наблюдаемых определим известным образом; для $f, g \in \mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ в точке $A \in \mathfrak{X}$ имеем: $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

Определение. *Многообразие* $\mathfrak{X}$ *назовем* Пуассон—Мальцевским, *если определено умножение* $\{\cdot, \cdot\}: \mathfrak{F}(\mathfrak{X}) \times \mathfrak{F}(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{X})$ *такое, что пара* $(\mathfrak{F}(\mathfrak{X}), \{\cdot, \cdot\})$ *есть* алгебра Мальцева *и имеет место правило Лейбница:*

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \quad \text{для всех} \quad f, g, h \in \mathfrak{F}(\mathfrak{X}).$$

Данное определение является естественным обобщением *пуассоновского* многообразия [62].

Появление аномалий в работах [11–13] может быть теперь просто истолковано: фактически происходит квантование некоторого (нелиевого?) Пуассон—Мальцевского многообразия, ассоциированного с данной неабелевой киральной калибровочной моделью. Здесь, конечно, следует ставить вопросительный знак, поскольку еще нет уверенности в том, что наблюдаемые данной (неабелевой киральной калибровочной) модели реализуют именно *нелиевое* Пуассон—Мальцевское многообразие [21, 22]. В этом плане интересной задачей является изучение в дальнейшем бипредставлений аномальной алгебры Мальцева из работ [11–13]; естественно ожидать, что квантованные наблюдаемые данной модели реализуют (нетривиальное?) бипредставление данной аномальной алгебры Мальцева. В связи с этим встает также необходимость изучения деформаций и сжатий алгебр Мальцева. Естественной задачей является также поиск обобщения концепции квантовой группы [63, 64]. Возможность такого обобщения рассматривается автором в настоящее время.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Я. Лыхмусу за постановку задачи настоящей работы и внимание к ней. Автор благодарен Л. Соргсеппу, инициатору методов неассоциативных структур в физике, за многочисленные интересные обсуждения, благодаря которым у автора созрела личная точка зрения на неассоциативные структуры в физике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kikkawa, M.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A., 1964, **28**, 199—207.
2. *Сабинин Л. В.* ДАН СССР, 1977, **233**, 800—803.
3. *Акивис М. А.* Сиб. мат. ж., 1978, **19**, 243—253.
4. *Paal, E., Kuusk, P.* Trans. Tallinn Tech. Univ., 1992, **733B**, 33—42.
5. *Сабинин Л. В.* Матем. зам., 1972, **12**, 605—616.
6. *Сабинин Л. В.* ДАН СССР, 1972, **205**, 533—536.
7. *Grossmann, B.* Phys. Lett., 1985, **152B**, 93—97.
8. *Jackiw, R.* Phys. Lett., 1985, **154B**, 303—304.
9. *Jackiw, R.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 159—162.
10. *Jackiw, R.* In: S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino, E. Witten. (eds.) Current Algebra and Anomalies, World Sci., Singapore, 1985, 81—210, 211—359.
11. *Jo, S.-G.* Phys. Lett., 1985, **163B**, 353—359.
12. *Niemi, A., Semenoff, G. W.* Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, 927—930.

13. *Semenoff, G. W.* Phys. Rev. Lett., 1988, **60**, 680—683.
14. *Moufang, R.* Math. Ann., 1935, **B110**, 416—430.
15. *Мальцев А. И.* Матем. сб., 1955, **36**, 569—576.
16. *Schafer, R. D.* An Introduction to Nonassociative Algebras. Academic Press, New York; London, 1966.
17. *Lukierski, J., Minnaert, P.* Phys. Lett., 1983, **B129**, 392—396.
18. *Sudbery, A.* J. Phys.: Math. and Gen., 1984, **17**, 939—955.
19. *Bjorken, J. B.* Phys. Rev., 1966, **148**, 1467—1478.
20. *Johnson, K., Low, F. E.* Progr. Theor. Phys. (Kyoto). Suppl., 1966, **37 & 38**, 74—93.
21. *Banerjee, R., Rothe, H. J., Rothe, K. D.* Mod. Phys. Lett., 1990, **5A**, 1103—1108.
22. *Banerjee, R., Rothe, H. J.* Double Commutators in Chiral gauge Theories. Prepr. HD-THEP 90—32, Inst. of Theor. Phys., Univ. Heidelberg, Heidelberg, 1990.
23. *Bruck, R. H.* A Survey of Binary Systems. Springer, Berlin; Heidelberg; New York, 1971.
24. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. Наука, Москва, 1967.
25. *Myung, H. C.* Malcev-admissible Algebras. Birhäuser Verlag, Basel; Boston; Stuttgart, 1986.
26. *Smith, J. D. H.* Algebras, Groups and Geometries, 1985, **3**, 209—234.
27. *Михеев П. О., Сабинин Л. В.* Проблемы геометрии, 1988, **20**, 75—110.
28. *Галкин В. М.* Алгебра. Топология. геометрии, 1988, **20**, 75—110.
29. *Кузьмин Е. Н.* Тр. Инст. Математики СО АН СССР, 1989, **16**, 75—101.
30. *Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П.* Совр. пробл. мат.: Фунд. напр., 1990, **57**, 179—271.
31. *Sagle, A. A.* Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **101**, 426—458.
32. *Yamaguti, K.* Kumamoto J. Sci., Ser. A., 1962, **5**, 203—207.
33. *Yamaguti, K.* Kumamoto J. Sci., Ser. A., 1963, **6**, 9—45.
34. *Loos, O.* Pacific J. Math., 1966, **18**, 553—562.
35. *Кузьмин Е. Н.* Алгебра и логика, 1968, **7**, 48—69.
36. *Kuzmine, E. N.* C. R. Acad. Sc. Paris, 1970, **271**, 1152—1155.
37. *Кузьмин Е. Н.* Алгебра и логика, 1971, **10**, 3—22.
38. *Акивис М. А., Шелехов А. М.* Сиб. мат. ж., 1971, **12**, 1181—1191.
39. *Гришков А. Н.* Алгебра и логика, 1977, **16**, 389—396.
40. *Кузьмин Е. Н.* Алгебра и логика, 1977, **16**, 424—431.
41. *Carlsson, R.* Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **244**, 173—184.
42. *Chein, O.* Memoirs Amer. Math. Soc., 1978, **13**, 197, 1—131.
43. *Кердман Ф. С.* ДАН СССР, 1979, **249**, 533—536.
44. *Кердман Ф. С.* Алгебра и логика, 1979, **18**, 523—555.
45. *Кердман Ф. С.* Алгебра и логика, 1979, **19**, 284—299.
46. *Сабинин Л. В., Михеев П. О.* ДАН СССР, 1982, **262**, 807—809.
47. *Liebeck, M. W.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1987, **102**, 33—47.
48. *Eilenberg, S.* Ann. Soc. Polon. Math., 1948, **21**, 125—134.
49. *Паал Э.* Введение в Муфанг-симметрию. Препр. F-42, Тарту, 1987.
50. *Паал Э.* Тр. Инст. физики АН ЭССР, 1987, **62**, 142—158.
51. *Paal, E.* Analytic Moufang-transformations. Prepr. F-46, Tartu, 1988.
52. *Lõhmus, J., Paal, E., Sorgsepp, L.* On currents and symmetries associated with Mal'tsev algebras. Prepr. F-50, Tartu, 1989.
53. *Паал Э.* Тр. Инст. физики АН ЭССР, 1989, **64**, 104—124.
54. *Paal E.* Trans. Inst. of Phys. Estonian Acad. Sci., 1990, **66**, 98—106.
55. *Paal, E.* Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 1991, **40**, 105—111.
56. *Paal, E.* In: Group Theoretical Methods in Physics. Proc. 18th Int. Colloq., June 4—9, 1990, Moscow, USSR. Springer, Berlin; Heidelberg; New York, 1991, 573—574.
57. *Paal, E.* In: Theory of Rings, Algebras and Models. Abstr. of Int. Con. on Algebra, Aug. 20—25, 1991, Barnaul, USSR. Novosibirsk, 1991, 172.
58. *Lõhmus, J. Paal, E., Sorgsepp, L.* In: Classical and Quantum Systems Foundations and Symmetries. Proc. II Int. Wigner Symposium, July 16—20, 1991, Goslar, FRG. World Scientific, Singapore, 1992 (in press).
59. *Lõhmus, J., Paal, E., Sorgsepp, L.* Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 1992, **41**, 133—141.

60. *Paal, E.* Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 1992, **41**, 125—132.
61. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. Наука, Москва, 1973.
62. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики. Наука, Москва, 1990.
63. *Дринфельд В. Г.* ДАН СССР, 1983, **268**, 285—287.
64. *Дринфельд В. Г.* Дифф. геом. Группы Ли и механика, 1986, **8**, 18—49.

Поступила в редакцию
21/XII 1992

Eugen PAAL

MOUFANGI-MALTSEVI SÜMMEETRIA

On selgitatud Moufangi-Maltsevi sümmeetria ideed ja esitatud ülevaade vastavast kirjandusest. On kasutusele võetud Poissoni-Maltsevi muutkonna mõiste. Autori arvates on siis võimalik mitte-Abeli kiraalse mõõtvälja teooria anomaalse kvantimise probleemi püstitada uudsest seisukohast ning lihtsamalt.

Eugen PAAL

MOUFANG-MAL'TSEV SYMMETRY

The idea of the Moufang-Mal'tsev symmetry is explained and a review of the relevant literature is given. A concept of the Poisson-Mal'tsev manifold is proposed, which enables the posing of the problem of anomalous quantization of non-Abelian chiral gauge theory from a new point of view and more clearly.