Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1991, 40, № 2, 75—79
https://doi.org/10.3176/phys.math.1991.2.02

УДК 519.852

Эвальд ЮБИ *

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦ ВРАЩЕНИЯМИ ГИВЕНСА

(Представил Г. Вайникко)

Ортогональные преобразования более трудоемки, чем исключения Гаусса, но численно устойчивы и позволяют делать вычисления с фиксированной запятой, если элементы A, b и c находятся в небольшом диапазоне. Вместо обычно принятого диагонального вида базисной матрицы предлагается использовать ее треугольную форму. Эта форма дает возможность при выводе из базиса какой-либо переменной использовать вращения Гивенса для восстановления треугольной формы базисной матрицы. В тестовых задачах найдены значительно более точные решения, чем дают распространенные программы симплекс-метода.

1. Введение

Пусть заданы $(m\times n)$-матрица A, m-вектор b и n-вектор c. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{gathered}(c,x)=z\to\min,\\ Ax=b,\\ x\geqslant 0,\end{gathered}\tag{1}$$

где x — искомый n-вектор. Запишем задачу в виде

$$\begin{gathered}Ax=b,\\ (c,x)-z=0,\end{gathered}\tag{2}$$

считая в дальнейшем A $(m+1)\times(n+1)$-матрицей и b $(m+1)$-вектором.

Рассмотрим алгоритм VRMSIM решения этой задачи. Для определенности допустим, что начальный базис в треугольной форме составляют m первых столбцов и система имеет вид

$$\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m+a_{1m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \qquad a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m+a_{2m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad\qquad a_{mm}x_m+a_{m\,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{m+1\,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{m+1\,n}x_n-z=b_{m+1}.\end{array}\tag{3}$$

Здесь опущен индекс номера шага и базисные переменные исключены из целевой функции. Начальные значения базисных переменных, начиная с $x_m^0=b_m/a_{mm}$, определяются из треугольной системы; значение целевой функции $z^0=-b_{m+1}$. Для определенности допустим, что минимальный коэффициент в последней строке $a_{m+1\,m+1}<0$. Тогда по правилам симплекс-метода в базис вводится x_{m+1}. Для нахождения вектора y^k — направления движения из текущей точки x^k в следующую точку x^{k+1} — нужно решить треугольную систему $m+1$-го порядка, в данном случае определенную первыми $m+1$ столбцами матрицы A и правыми частями $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, $b_{m+1}=1$. Тогда сумма $x+\Delta zy$

* Tallinna Tehnikaülikool (Таллиннский технический университет). 200026 Tallinn, Ehitajate tee, 5. Estonia.

есть параметрическое решение треугольной системы относительно параметра Δz. Это позволяет при убывании z, начиная с $z^0 = -b_{m+1}$, определить выводимую из базиса переменную x_t по минимальному отношению

$$\min_{y_j > 0} \frac{x_j}{y_j} = \frac{x_t}{y_t}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Из уравнения $x_t + \Delta z y_t = 0$ определим приращение целевой функции Δz, ее новое значение $\tilde{z}$ и новое базисное решение $\tilde{x}$,

$$\Delta z = -\frac{x_t}{y_t}, \tag{5}$$

$$\tilde{z} = z + \Delta z, \tag{6}$$

$$\tilde{x} = x + \Delta z y. \tag{7}$$

Для аннулирования некоторых элементов A используем ортогональные преобразования — вращения Гивенса, определенные матрицей

$$G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

Для аннулирования в заданном двумерном ненулевом векторе $v = (v_1, v_2)^T$ одной компоненты положим

$$c = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad s = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad \text{тогда} \quad Gv = \begin{pmatrix} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

В [2] стр. 45 приводится подробное описание подпрограммы вращения Гивенса с указанием мер по предотвращению неоправданных машинных нулей или переполнений.

Допустим для определенности, что из базиса выводится в соответствии с формулой (4) переменная x_1. Тогда для придания базисным столбцам треугольной формы нужно в системе (3) аннулировать элементы на главной диагонали начиная с a_{22} до $a_{m+1\,m+1}$. Для этого применим сначала вращения Гивенса к элементам первой и второй строки, полагая $v = (a_{12}, a_{22})^T$, а аннулируем a_{22}. Затем применим вращения к элементам второй и третьей строки для аннулирования a_{33} и т. д. Таким же преобразованиям подвергаются правые части и коэффициенты последнего столбца, соответствующего z. В общем случае нужно аннулировать на главной диагонали элементы, следующие выводимому столбцу a_t. Далее, по минимальному элементу в последней строке определим вводимую переменную, новые x, y, z и т. д.

Если все оценки переменных в последней строке неотрицательны при $a_{m+1\,n+1} < 0$ или неположительны при $a_{m+1\,n+1} > 0$, т. е. выполняется критерий оптимальности симплекс-метода, найденный вектор x является оптимальным решением.

Другая возможность применения ортогональных преобразований при решении задач линейного программирования рассматривается в [1]. В ней используется разложение матрицы A по некоторой ортогональной системе векторов.

Если допустимого треугольного или диагонального начального базиса нет, можно использовать обычный двухэтапный симплекс-метод с начальным базисом в диагональной форме. Алгоритм VRMSIM применим и в случае неполного ранга матрицы A.

Для определения начального базисного решения можно использовать также только ортогональные преобразования (см. [3, 4]).

2. Описание алгоритма

Опишем теперь подробно алгоритм VRMSIM решения задачи (1). По-прежнему считаем A $(m+1)\times(n+1)$-матрицей, в последнем столбце которой хранятся коэффициенты перед z, и b $(m+1)$-вектором. Кроме них требуются еще два n-вектора x и y.

Алгоритм VRMSIM (A, b, x, y, z, m, n, ε).

1. Найти решение начальной треугольной базисной системы и положить $z=-b_{m+1}$.
2. Если $a_{m+1\ n+1}<0$, перейти к шагу 3, в противном случае к 4.
3. Найти $t=\min\limits_{j=1,\cdots,n} a_{m+1\ j}=a_{m+1\ j_0}$, перейти к шагу 5.
4. Найти $t=\max\limits_{j=1,\cdots,n} a_{m+1\ j}=a_{m+1\ j_0}$.
5. Если $|t|\leqslant\varepsilon$, перейти к шагу 15.
6. Присоединить к базисной треугольной $m\times m$-матрице столбец a_{j_0}.
7. Найти n-вектор y как решение базисной треугольной системы $m+1$-го порядка (аналогичной системе (3)) с правой частью

$$b_y=-a_{n+1},\tag{9}$$

где $a_{n+1}n+1$-й столбец преобразованной системы (2).

8. Найти

$$u=\min_{y_i>\varepsilon}\frac{x_j}{y_j}=\frac{x_t}{y_t},\quad j=1,\ldots,n.\tag{10}$$

9. Если $y_j\leqslant\varepsilon$ для всех $j=1,\ldots,n$, то целевая функция в задаче (1) не ограничена. Стоп.
10. Выполнить серию вращений Гивенса для удаления столбца a_t из базиса.
11. Исключить переменные x_t и y_t из базиса

$$x_t=y_t=0.\tag{11}$$

12. Найти новое значение целевой функции.

$$\tilde{z}=z-u.\tag{12}$$

13. Вычислить новое базисное решение

$$\tilde{x}_j=x_j-uy_j,\qquad j=1,\ldots,n.\tag{13}$$

14. Перейти к шагу 2.
15. Задача решена.

На втором шаге всегда $a_{m+1\ n+1}\neq 0$, так как ранг матрицы, составленной из базисных столбцов и a_{n+1}, равен $m+1$ и не изменяется при ортогональных преобразованиях.

На 10-м шаге вращения Гивенса выполняются для преобразования треугольной $(m+1)\times(m+1)$-базисной системы к $m\times m$-системе, см. пример 1 в разделе 3.

Неограниченность целевой функции на 9-м шаге следует из формулы (13), так как при неограниченном возрастании u новое базисное решение $\tilde{x}$ остается допустимым.

3. Результаты вычислений

Пример 1.

$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1,$$
$$x_2 - x_3 + 3x_4 = 3,$$
$$2x_3 - 4x_4 - x_5 - z = 2,$$
$$x \geqslant 0,$$

где минимизируется целевая функция $z = -2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5$. При $z = -2$ начальный базис составляют $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Шаг		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	z
		4	—1	1	—1	2	0	1
1.		0	1	—1	3	0	0	3
		0	0	2	—4	—1	—1	2
	x	1	3	0	0	0		
	y	0,125	0,75	0	—0,25	0		
		4	—1	1	—1	2	0	
2.		0	0,60	—2,20	5	0,80	0,80	
		0	0,80	0,40	0	—0,60	—0,60	
	x	0,50	0	0	1	0		
	y	0,50	0	0	0	—1		
		—0,78	0,78	—2,35	5,10	0,39	0,78	
3.		3,77	—1,05	0,42	0	2,20	0,31	
		—1,07	—0,53	—0,53	0	0	0,53	
	x	0	0	0	1	1		

На первом шаге вводится x_4 и выводится x_2, вращаются вторая и третья строка. Матрица вращения G строится по вектору $v = (3, -4)^T$, $G = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. По формуле (10) $u = x_2/y_2 = 4$, $\tilde{z} = -2 - u = -6$. На втором шаге вводится x_5 и выводится x_1. При вращении первой и второй строки $V = (-1, 5)^T$, при вращении второй и третьей строки $V = (-1{,}70;\ -0{,}60)^T$, $u = x_1/y_1 = 1$, $\tilde{z} = -6 - 1 = -7$. Найденное решение $x = x^* = (0, 0, 0, 1, 1)^T$ оптимальное, $z^* = -7$. Программа решения задачи была составлена на алгоритмическом языке ФОРТРАН-77, операционная система VM — ЭВМ ЕС-1055М. Использовалась двойная точность всех переменных.

Пример 2. Этот пример с матрицей Гильберта характеризует точность вычислений,

$$a_{ij} = 1/(i+j), \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} 1/(k+i), \quad c_j = -b_j - 1/(j+1), \quad i, j = 1, \ldots$$

$\ldots, m$. Ограничения задачи в виде $\leqslant$ сводятся к равенствам с помощью дополнительных переменных, которые и составляют начальный базис. Оптимальное решение задачи $x_j^* = 1$, $j = 1, \ldots, m$, $z^* = -m - \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)/(m+1+j)$. При использовании двойной точности число ε надо выбрать порядка 10^{-16}—10^{-14}. В случае $m = 8$ при $\varepsilon = 10^{-10}$ алгоритмом VRMSIM было найдено решение, далекое от оптимального (например, переменная x_5 осталась внебазисной, в то же время как $x_6 = 2{,}6$), при $\varepsilon = 10^{-15}$ было найдено оптимальное решение с точностью 10^{-6}. Удовлетворительное решение было найдено еще при $m = 10$ и $m = 11$, когда оптимальные значения переменных были определены с точностью 0,0001 и 0,01. Начиная с $m=12$, не удается найти оптимальных значений переменных, хотя минимум целевой функции определяется с большой точностью, например, при $m=12$ и $m=13$ эта точность равна 10^{-14}. Некоторые переменные не активизируются, так как их оценки порядка 10^{-16}—10^{-15} и имеют неправильный знак.

Известные пакеты по линейному программированию позволяют решить эту задачу только для $m=4$—8.

Пример 3.
$$\begin{aligned} & x_1+x_2+x_3+x_4=z\to\max, \\ & x_1+x_2+x_3+(1+t)x_4\leqslant 4+t, \\ & x_1+x_2 \qquad +x_4\leqslant 3, \\ & x_1 \qquad\qquad +x_4\leqslant 2, \\ & \qquad\qquad x\geqslant 0. \end{aligned}$$

Эта задача имеет целочисленное оптимальное решение при $t=0$. При $\varepsilon=10^{-15}$ и $t=\pm10^{-14}$ были найдены x^* и z^* с точностью 10^{-15}.

В заключение автор выражает благодарность М. Тамм и Л. Кивистику за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А.* 1977. Численные методы линейного программирования. Москва.
2. *Лаусон Ч., Хенсон Р.* 1986. Численное решение задач метода наименьших квадратов. Москва.
3. *Юби Э. А.-Ю.* 1989. Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 38, № 4, 423—432.
4. *Юби Э. А.-Ю.* 1991. Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 40, № 1, 17—24.

Поступила в редакцию
23/X 1990

Evald ÜBI

SIMPLEKSTABELITE TEISENDAMINE GIVENSI PÖÖRETE ABIL

Esitatavas meetodis on kasutatud baasimaatriksit kolmnurksel kujul. Sel juhul on võimalik Gaussi teisenduste asemel kasutada Givensi pöördeid.

Evald ÜBI

CONVERSION OF THE SIMPLEX TABLEAU BY THE GIVENS ROTATIONS

These orthogonal transformations need more labour than the Gauss eliminations, but they are more stable numerically and allow to make computations with a fixed point if elements *A*, *b* and *c* do not have too large a range. Instead of a commonly used diagonal form of the basis matrix, we rather suggest to use its triangular form. It allows to implement the Givens rotations for resettling the triangular form of the basis matrix when a certain variable is being removed from a base. A more precise solution has been found in the test problems than is provided by the well-known programs of the simplex method.